Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2006/2007
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato 3 (16 Ottobre 2006)
A cura di **Chiara Valenti**

1. Siano $X = \{a, b, c, d, e\}$ e$Y = \{x1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $X \times Y$ sono grafici di applicazioni:
   (a) $G = \{(b, 2), (c, 2), (d, 7), (e, 8)\}$;
   (b) $G = \{(b, 2), (c, 1), (d, 7), (e, 8), (a, 3), (b, 5)\}$;
   (c) $G = \{(b, 2), (c, 2), (d, 5), (a, 8), (e, 2)\}$;
   (d) $G = \{(b, 2), (c, 8), (d, 7), (e, 1), (a, 4)\}$.
2. Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sono grafici di applicazioni:
   (a) $G = \{(x, y) \mid 2x - 3y = 18\}$;
   (b) $G = \big\{(x, y) \mid 2x^2 - 3y = 18\big\}$;
   (c) $G = \big\{(x, y) \mid 2x - 3y^2 = 18\big\}$;
   (d) $G = \big\{(x, y) \mid 2x^2 - 3y^2 = 18\big\}$.
3. Siano $X = \{1, 2\}$ e $Y = \{a, b\}$. Definire esplicitamente tutte le corrispondenze da X a Y. Determinare quali tra esse sono applicazioni.
4. Siano $X = \{1, 2\}$ e $Y = \{a, b, c\}$. Definire esplicitamente tutte le applicazioni $f : X \to Y$. Quali sono iniettive?
5. Definire tutte le applicazioni biunivoche di A in A per $A = \{a, b\}$ e $A = \{a, b, c\}$.

   Quante sono le applicazioni biunivoche di A in A quando $|A| = n$?
6. Siano A e B due insiemi finiti. Mostrare che
   (a) È possibile definire una applicazione iniettiva $f : A \to B$ se e soltanto se $|A| \leq |B|$.
   (b) È possibile definire una applicazione suriettiva $f : A \to B$ se e soltanto se $|A| \geq |B|$.
7. Sia A un insieme finito e $f : A \to A$ una applicazione. Mostrare che f è iniettiva se e soltanto se f è suriettiva se e soltanto se f è biiettiva.

   Mostrare con un esempio che questo non è vero se A non è finito.
8. Stabilire quali tra le seguenti funzioni sono iniettive e quali suriettive. Inoltre, quando f è biiettiva, definire f^{-1}:
   (a) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, f(n) = 3n$
   (b) $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, f(n) = 5n$
   (c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

(d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$

(e) $f : \{x \in \mathbb{R}\,; -1 \leq x \leq 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dove f e' definta da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \ . \end{cases}$$

(f) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dove f e' definta da

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ -k & \text{se } n = 2k+1 \\ k & \text{se } n = 2k \ . \end{cases}$$

(g) $f : \{x \in \mathbb{R}\,; 0 < x < 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dove f e' definta da

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4x} & \text{se } 0 < x < \frac{1}{4} \\ 4x - 2 & \text{se } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ \frac{4}{x - \frac{3}{4}} & \text{se } \frac{3}{4} < x < 1. \end{cases}$$

9. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Calcolare $g \circ f$ e $f \circ g$ nei seguenti casi:

   (a) $f(x) = 2x - 1$, $g(y) = 3y + 8$;

   (b) $f(x) = 2x - 1$, $g(y) = y^2$;

   (c) $f(x) = x^3$, $g(y) = y^4$.

10. Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due applicazioni. Mostrare che:

    (a) Se f e g sono entrambe iniettive (risp. suriettive, biiettive), allora $g \circ f$ è iniettiva (risp. suriettiva, biiettiva);

    (b) Se $g \circ f$ è iniettiva (risp. suriettiva), allora f è iniettiva (risp. g è suriettiva).

    Mostrare inoltre con esempi che il viceversa delle precedenti affermazioni non è vero.

11. Sia $A := \{a, b, c\}$ e $\mathbf{2} := \{0, 1\}$. Esplicitare le corrispondenze biunivoche

$$\mathcal{P}(A) \to \mathbf{2}^A \to \mathbf{2}^3\,; \quad X \to f_X \to (f_X(a), f_X(b), f_X(c)),$$

dove $f_X : A \to \mathbf{2}$ è la funzione caratteristica di $X \subseteq A$.