Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2006/2007
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato 6 (20 Novembre 2006)
A cura di **Chiara Valenti**

1. Si considerino le seguenti operazioni:

   (a) $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (a, b) \mapsto a * b = a^2 + b$;

   (b) $\setminus : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A), \quad (X, Y) \mapsto X \setminus Y$, dove A è un insieme con almeno due elementi.

   Stabilire se:

   (a) Queste operazioni sono associative o/e commutative;

   (b) Esse ammettono un elemento neutro a destra o/e a sinistra;

   (c) Esistono elementi simmetrizzabili;

   (d) Esistono elementi cancellabili a destra o/e a sinistra.

   NB. Se $*$ è una operazione su un insieme A, si dice che un elemento $x \in A$ è cancellabile a destra (rispettivamente a sinistra) se, comunque scelti $a, b \in A$,

   $$a * x = b * x \Rightarrow a = b \text{ (rispettivamente } x * a = x * b \Rightarrow a = b) \; .$$

2. Scrivere le seguenti permutazioni di $\mathbf{S}_9$ come prodotto di cicli disgiunti. Determinarne inoltre l'ordine e la parità:

   $$(143)(2531)(24)\,; \quad (176)(914)\,; \quad (23)(21)(24)\,;$$
   $$(13579)(2468)\,; \quad (1653)(4368)(879)\,; \quad (13)(1435)(7986)(123)\,.$$

3. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbf{S}_4$

   $$\mathbf{V} := \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

   Mostrare che $\mathbf{V}$ è un gruppo commutativo rispetto alla composizione di permutazioni. Tale gruppo si chiama il *gruppo di Klein* ($\mathbf{V}$ sta per il tedesco *vier* che significa *quattro*).

4. Mostrare che il numero degli r-cicli distinti di $\mathbf{S}_n$ è $\frac{n!}{(n-r)!r}$.

5. Se $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, indichiamo con $n\mathbb{Z}$ l'insieme degli interi relativi multipli di n . Dimostrare che:

   (a) Se $n > 1$, $n\mathbb{Z}$ è un anello commutativo non unitario;

   (b) $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \Leftrightarrow m \mid n$;

   (c) $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$, dove $a = m.c.m.(m, n)$.

   (d) Se $m \nmid n$ e $n \nmid m$, allora $n\mathbb{Z} \cup m\mathbb{Z} \neq a\mathbb{Z}$ per ogni $a \in \mathbb{N}$.

6. Sia $n > 2$ e $A = \mathbb{R}^n$ l'insieme delle n-ple ordinate di numeri reali. In A si considerino le operazioni definite da

$$\begin{aligned}(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) &= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)\\ (a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n) &= (a_1 b_1, \dots, a_n b_n).\end{aligned}$$

   Mostrare che $(A, +, \cdot)$ è un anello commutativo unitario e stabilire quali elementi sono invertibili rispetto alla moltiplicazione.

7. Sia X un insieme non vuoto. Nell'insieme $\mathcal{P}(X)$ delle parti di X, si definiscano le operazioni

$$\begin{aligned}A + B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad (\textit{differenza simmetrica})\\ AB &= A \cap B.\end{aligned}$$

   Mostrare che $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$ è un anello commutativo unitario, che $A^2 = A$ per ogni $A \subseteq X$ e che X è l'unico elemento invertibile rispetto alla moltiplicazione.

8. Sia

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

   e si definiscano in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le operazioni

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

   Questa moltiplicazione si chiama *moltiplicazione righe $\times$ colonne.*

   Mostrare che $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un anello unitario ma non commutativo e determinare gli elementi invertibili rispetto alla moltiplicazione. Questo anello si chiama l'*anello delle matrici quadrate di dimensione* 2 *su* $\mathbb{R}$.

   In modo analogo si può definire l'*anello delle matrici quadrate di dimensione n* su un anello commutativo unitario A, in particolare su un campo, come l'insieme

$$\mathcal{M}_n(A) := \{(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}; a_{ij} \in A\}$$

   con le operazioni

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}), \quad (a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij})$$

   dove $c_{ij} = \sum_{k=1,\dots,n} a_{ik} b_{kj}$.