Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2006/2007
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato 7 (27 Novembre 2006)
A cura di **Chiara Valenti**

1. Siano $z, z' \in \mathbb{C}$. Verificare che
$$||z|| \cdot ||z'|| = ||zz'||.$$

2. Si scrivano i seguenti numeri complessi, i loro coniugati ed i loro inversi in *forma trigonometrica*, ovvero nella forma $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, con $\rho \in \mathbb{R}^+$, e $0 < \theta \leq 2\pi$:
$$5,\ -7,\ i,\ -3i,\ 1+i,\ -\sqrt{3}+i.$$
Determinare inoltre le loro radici terze e quarte e rappresentarle sul piano di Gauss.

3. Sia $\xi = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ una radice n-sima dell'unità. Se m è il minimo intero positivo tale che $\xi^m = 1$, si dice che ξ ha *ordine* m. Con questa terminologia, le radici *primitive* n-sime sono esattamente quelle di ordine n.

   Dimostrare che:

   (1) Se k divide n, ξ ha ordine $\frac{n}{k}$;

   (2) Se m è l'ordine di ξ, m divide n (*Suggerimento*: dividere n per m);

   (3) Se $d = MCD(n,k)$, l'ordine di ξ è $\frac{n}{d}$;

   (4) ξ è una radice n-sima primitiva se e soltanto se $d = 1$;

   (5) Se ξ è una radice n-sima primitiva, tutte e sole le radici n-sime di 1 sono
$$\xi, \xi^2, \dots, \xi^n = 1.$$

4. Determinare il gruppo delle radici n-sime dell'unità per
$$n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12.$$
Stabilire inoltre qual è l'ordine di ogni radice.

5. Sia $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Mostrare che $\mathbb{Z}[i]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$. Tale anello si chiama l'*anello degli interi di Gauss*.

6. Siano:
$$U = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| = 1\};\quad V = \{z \in \mathbb{C}\,;\ \text{esiste } n \geq 1 \text{ tale che } z^n = 1\}.$$
Mostrare che U e V sono sottogruppi del gruppo moltiplicativo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ dei complessi e che $V \subseteq U$.