

## AL 1 - Lavoro guidato

Giovedì 19 ottobre 2006

1. Sia  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto 2x$  e sia  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $y \mapsto y/2$  se  $y$  è pari,  $y \mapsto \frac{y-1}{2}$  se  $y$  è dispari.
  - (a) Determinare se  $f$  e  $g$  sono iniettive e suriettive.
  - (b) Determinare  $f \circ g$  e  $g \circ f$ .
  
2. Sia  $f : A \rightarrow B$  una funzione.
  - (a) Dimostrare che  $f$  è iniettiva se e soltanto se esiste  $g : B \rightarrow A$  tale che  $g \circ f = id_A$ .
  - (b) Dimostrare che  $f$  è suriettiva se e soltanto se esiste  $g : B \rightarrow A$  tale che  $f \circ g = id_B$ .
  
3. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 3x^3$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x + 4$ .
  - (a) Dimostrare che  $f$ ,  $g$  e  $f \circ g$  sono biiettive.
  - (b) Determinare  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $(f \circ g)^{-1}$ ,  $g^{-1} \circ f^{-1}$ .
  
4. Siano  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  funzioni biiettive. Dimostrare che  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ .
  
5. Sia  $\rho$  la relazione su  $\mathbb{Z}$  definita da:  $n\rho m$  se e soltanto se  $n^2 = m^2$ .
  - (a) Dimostrare che  $\rho$  è una relazione di equivalenza.
  - (b) Determinare l'insieme quoziente  $\mathbb{Z}/\rho$ .
  
6. Sia  $\rho$  la relazione su  $\mathbb{R}$  definita da:  $x\rho y$  se e soltanto se  $x - y \in \mathbb{Z}$ .
  - (a) Dimostrare che  $\rho$  è una relazione di equivalenza.
  - (b) Determinare l'insieme quoziente  $\mathbb{Z}/\rho$ .