

AL 1 - Lavoro guidato

Giovedì 26 ottobre 2006

1. Sia ρ la relazione di equivalenza su $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$, definita da $(a, b)\rho(c, d)$ se e soltanto se $ad - bc = 0$.
 - (a) Dimostrare che ρ è una relazione di equivalenza.
 - (b) Determinare la classe di equivalenza di un elemento (a, b) rispetto a ρ
 - (c) Determinare l'insieme quoziente X/ρ .

2. Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$.
 - (a) Determinare l'immagine di f .
 - (b) Determinare l'insieme quoziente di \mathbb{Z} rispetto alla relazione nucleo di f .
 - (c) Definire esplicitamente la biiezione canonica $\mathbb{Z}/\equiv_f \rightarrow Im(f), \bar{x} \mapsto f(x)$.

3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^2 + 4x + 2$
 - (a) Determinare l'immagine di f .
 - (b) Determinare l'insieme quoziente di \mathbb{Z} rispetto alla relazione nucleo di f .
 - (c) Definire esplicitamente la biiezione canonica $\mathbb{R}/\equiv_f \rightarrow Im(f), \bar{x} \mapsto f(x)$.

4. Dimostrare per induzione che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1)$

5. Dimostrare per induzione che la somma dei primi n numeri naturali dispari è n^2 .