

## AL 1 - Lavoro guidato

Giovedì 26 ottobre 2006

1. Sia  $\rho$  la relazione di equivalenza su  $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ , definita da  $(a, b)\rho(c, d)$  se e soltanto se  $ad - bc = 0$ .
  - (a) Dimostrare che  $\rho$  è una relazione di equivalenza.
  - (b) Determinare la classe di equivalenza di un elemento  $(a, b)$  rispetto a  $\rho$
  - (c) Determinare l'insieme quoziente  $X/\rho$ .
  
2. Sia  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$ .
  - (a) Determinare l'immagine di  $f$ .
  - (b) Determinare l'insieme quoziente di  $\mathbb{Z}$  rispetto alla relazione nucleo di  $f$ .
  - (c) Definire esplicitamente la biiezione canonica  $\mathbb{Z}/\equiv_f \rightarrow Im(f), \bar{x} \mapsto f(x)$ .
  
3. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^2 + 4x + 2$ 
  - (a) Determinare l'immagine di  $f$ .
  - (b) Determinare l'insieme quoziente di  $\mathbb{Z}$  rispetto alla relazione nucleo di  $f$ .
  - (c) Definire esplicitamente la biiezione canonica  $\mathbb{R}/\equiv_f \rightarrow Im(f), \bar{x} \mapsto f(x)$ .
  
4. Dimostrare per induzione che per ogni numero naturale  $n \geq 1$  si ha  $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1)$
  
5. Dimostrare per induzione che la somma dei primi  $n$  numeri naturali dispari è  $n^2$ .