Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2006/2007
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Recupero del primo esonero
18 Gennaio 2007

*Cognome*__________________ *Nome*__________________

*Numero di matricola*__________________________

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

Esercizio 1. In $\mathbb{Z}$ si definisca la relazione

$$a \ \rho \ b \Leftrightarrow \text{ esistono } h, k \geq 0 \text{ tali che } 2^h a = 2^k b.$$

(a) Verificare che ρ è una relazione di equivalenza.

(b) Verificare che l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\rho$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $D \cup \{0\}$, dove D denota l'insieme dei numeri dispari.

Esercizio 2. Sia S l'insieme dei sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{N}$, cioè sia $S = P(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$. Si consideri in S la relazione definita da:

$$X \leq Y \Leftrightarrow X = Y \text{ oppure } x \leq y \text{ per ogni } x \in X \text{ e } y \in Y.$$

(a) Verificare che questa relazione è una relazione d'ordine.

(b) Stabilire se S ha elementi massimali o minimali.

Esercizio 3. Usando il Principio di Induzione, provare che, per ogni numero naturale $n \geq 1$, risulta

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = 6\binom{n+3}{4}.$$

Esercizio 4. Scrivere il numero 1334 in base 5.

Esercizio 5. (a) Dare le seguenti definizioni:

1. corrispondenza tra insiemi;
2. applicazione di insiemi;
3. applicazione iniettiva;
4. applicazione suriettiva.

(b) Si consideri la funzione:

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\ ; \quad f(X) = \begin{cases} n+1 \text{ se } n \text{ è dispari} \\ n-1 \text{ se } n \text{ è pari} \end{cases} \quad .$$

Verificare che tale applicazione è biiettiva e definire la sua funzione inversa.