Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2006/2007
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Prima prova di valutazione intermedia
9 Novembre 2006

Esercizio 1. $(A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B) = (A \cup (\complement A \cap B)) \cap (\complement B \cup (\complement A \cap B)) = (A \cup \complement A) \cap (A \cup B) \cap (\complement B \cup \complement A) \cap (\complement B \cap B) = X \cap (A \cup B) \cap \complement(A \cap B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Esercizio 2. Per dimostrare che ρ è una relazione d'ordine, bisogna verificare che soddisfa le proprietà (R) riflessiva , (AS) antisimmettrica e (T) transitiva.

(R) $f \rho f$, perché $f = f$.

(AS) Dato che non è possibile avere contemporaneamente $\mathrm{Im}(f) \subsetneq \mathrm{Im}(g)$ e $\mathrm{Im}(g) \subsetneq \mathrm{Im}(f)$, dalla definizione di ρ, se $f \rho g$ e $g \rho f$, necessariamente $f = g$.

(T) Sia $f \rho g$ e $g \rho h$. Per mostrare che $f \rho h$, bisogna distinguere vari casi :

1) se $\mathrm{Im}(f) \subsetneq \mathrm{Im}(g)$ e $\mathrm{Im}(g) \subsetneq \mathrm{Im}(h)$, allora $\mathrm{Im}(f) \subsetneq \mathrm{Im}(h)$.

2) Se $\mathrm{Im}(f) \subsetneq \mathrm{Im}(g)$ e $g = h$, allora $\mathrm{Im}(f) \subsetneq \mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(g)$.

3) Se $f = g$ e $\mathrm{Im}(g) \subsetneq \mathrm{Im}(h)$, allora $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g) \subsetneq \mathrm{Im}(h)$.

4) Se $f = g$ e $g = h$, allora $f = h$.

Quindi ρ è una relazione d'ordine.

Cerchiamo ora gli elementi massimali. Consideriamo prima di tutto un'applicazione $f \in Y$ suriettiva. Se esistesse $g \in Y$, $g \neq f$, tale che $f \rho g$, si dovrebbe avere $X = \mathrm{Im}(f) \subsetneq \mathrm{Im}(g)$, che è impossibile. Quindi ogni applicazione suriettiva è un elemento massimale di Y. Se poi consideriamo $g \in Y$ non suriettiva, è sempre possibile trovare una funzione suriettiva f (ad esempio l'identità su X), tale che $\mathrm{Im}(g) \subsetneq \mathrm{Im}(f) = X$. Quindi se g non è suriettiva, non è un elemento massimale di Y. Pertanto gli elementi massimali di Y sono esattamente le applicazioni suriettive.

Cerchiamo ora gli elementi minimali. Sia $f \in Y$ un'applicazione costante con immagine $\{x\}$ per qualche $x \in X$. Se esistesse $g \in Y$, $g \neq f$, tale che $f \rho g$, bisognerebbe avere $\mathrm{Im}(g) \subsetneq \mathrm{Im}(f) = \{x\}$, cioè $\mathrm{Im}(f) = \emptyset$, assurdo. Quindi ogni applicazione costante è un elemento minimale. Se invece $g \in Y$ è una funzione non costante, si prenda $x \in \mathrm{Im}(g)$ e si consideri f l'applicazione costante che associa x ad ogni elemento di X. Allora $\mathrm{Im}(f) \subsetneq \mathrm{Im}(g)$ e quindi $f \rho g$. Quindi g non è un elemento minimale. Pertanto gli elementi minimali di Y sono esattamente le applicazioni costanti.

Esercizio 3.

(a) $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, infatti per ogni $a \in \mathbb{R}$, ad esempio $f((a, 1)) = a$.

(b) $[(x, y)]_\rho = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2, x'y' = xy\}$.

(c) Osserviamo che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $[(x,y)]_{\rho_f} = [(xy,1)]_{\rho_f}$, quindi $\mathbb{R}^2/\rho_f = \{[(a,1)]_{\rho_f}, a \in \mathbb{R}\}$.

(d) $\mathbb{R}^2/\rho_f \to \mathbb{R}$, $[(a,1)]_{\rho_f} \mapsto a$.

Esercizio 4. Per $n = 1$, si ha $1 = \frac{(2)!}{2 \cdot 1!}$. Supponiamo ora $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$. Vogliamo dimostrare che $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1) = \frac{(2(n+1))!}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}$. Si ha $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \cdot (2n+1) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \cdot (2n+1) \cdot \frac{2n+2}{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{2^n \cdot n! \cdot 2(n+1))} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}$.

Esercizio 5.

a) Siano $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a,b) \neq (0,0)$. $d \in \mathbb{Z}$ è un massimo comune divisore di a e b se

(1) $d \mid a$ e $d \mid b$;

(2) Se $d' \in \mathbb{Z}$ è tale che $d' \mid a$ e $d' \mid b$, allora $d' \mid d$.

N.B Se $a = b = 0$, ogni intero d soddisfa la proprietà (1) e nessun intero d soddisfa la proprietà (2).

b) Sia ha:

$$\begin{aligned} 1053 &= 455 \cdot 2 + 143 \\ 455 &= 143 \cdot 3 + 26 \\ 143 &= 26 \cdot 5 + 13 \\ 26 &= 13 \cdot 2 \end{aligned}$$

Quindi il massimo comune divisore fra 1053 e 455 è 13.

Inoltre $13 = 143 - 26 \cdot 5 = 143 - (455 - 143 \cdot 3) \cdot 5 = 16 \cdot 143 - 5 \cdot 455 = 16 \cdot (1053 - 455 \cdot 2) - 5 \cdot 455 = 16 \cdot 1053 - 37 \cdot 455$.

Per trovare un'altra identità di Bezout, si può prendere ad esempio $471 = 16 + 455$ e $-1090 = -37 - 1053$. Infatti $1053 \cdot 471 + 455(-1090) = 1053 \cdot 16 + 1053 \cdot 455 - 37 \cdot 455 - 1053 \cdot 455 = 1053 \cdot 16 - 37 \cdot 455 = 13$.