Complementi di Algebra Commutativa

Alessandro Carciola – Carmelo Antonio Finocchiaro

Notazioni e terminologia

Se $\mathcal{F}$ è una collezione non vuota di insiemi, indicheremo con $\bigcap \mathcal{F}$ (risp. $\bigcup \mathcal{F}$) l'intersezione (risp. l'unione) dei membri di $\mathcal{F}$.
Se X, Y sono spazi topologici, diremo che una funzione $f : X \longrightarrow Y$ è un'*immersione topologica* se è continua, iniettiva e stabilisce un omeomorfismo fra X e $f(X)$.
Se X è uno spazio topologico e Y è un suo sottospazio, indicheremo con $\mathrm{Ad}_X(Y)$ la chiusura di Y in X.
Se A è un anello, X è un $A-$modulo e I è un insieme, la somma diretta di $\mathrm{Card}(I)$ copie di X verrà indicata con $X^{(I)}$, ovvero

$$X^{(I)} := \{f : I \longrightarrow X : f^{-1}(X \setminus \{0\}) \text{ è finito }\}.$$

Ovviamente, un $A-$modulo è libero se e soltanto se è isomorfo a $A^{(I)}$, per qualche insieme I.
Un $A-$modulo X si dice $A-$*piatto* se, per ogni applicazione $A-$lineare $f : Y \longrightarrow Z$ iniettiva, l'applicazione $A-$lineare $f \otimes_A 1 : Y \otimes_A X \longrightarrow Z \otimes_A X$ è iniettiva.
Intendermo ogni $A-$modulo X unitario, ovvero $1 \cdot x = x$, per ogni $x \in X$. Ricordiamo che un $A-$modulo X si dice *privo di torsione* se $\mathrm{Ann}_A(x) = \{0\}$, per ogni $x \in X \setminus \{0\}$. X si dice *di torsione* se $\mathrm{Ann}_A(x) \neq \{0\}$, per ogni $x \in X$. Un gruppo abeliano si dice *di torsione* se tale risulta come $\mathbb{Z}-$modulo.
Se A è un anello locale, indicheremo $\mathfrak{m}(A)$ il suo massimale e con $\kappa(A)$ il suo campo residuo. Se v è una valutazione di un campo K, indicheremo con A_v l'anello di valutazione di K associato a v. Diremo *campo residuo di* v il campo residuo $\kappa(A_v)$ di A_v. Indicheremo con $\mathrm{Zar}(K)$ l'insieme degli anelli di valutazine di un campo K.
Se B/A è un ampliamento di anelli, indicheremo con $\overline{A}^B$ la chiusura integrale di A in B.
Se K è un campo, indicheremo con $\overline{K}$ una sua chiusura algebrica.

1 Preliminari di Algebra Lineare e Teoria dei Campi

1.1 DEFINIZIONE. *Siano K un campo e X uno spazio vettoriale su K.*

(1) *Un'applicazione $T : X \times X \longrightarrow K$ si dice* forma bilineare *se*

$$T(ax+by, a'x'+b'y') = aa'T(x,x')+ab'T(x,y')+a'bT(x',y)+bb'T(y,y'),$$

per ogni $a, a', b, b' \in K$ $x, x', y, y' \in X$.

(2) *Una forma bilineare $T : X \times X \longrightarrow K$ si dice* simmetrica *se $T(x,y) = T(y,x)$, per ogni $x, y \in X$.*

(3) *Una forma bilineare $T : X \times X \longrightarrow K$ si dice* non degenere *se è simmetrica e se*

$$\{x \in X : T(x,y) = 0 \text{ per ogni } y \in X\} = \{0\}.$$

1.2 OSSERVAZIONE. Siano X un $K-$spazio vettoriale, $\mathcal{B}$ una sua base e $T : X \times X \longrightarrow K$ una forma bilineare simmetrica. Allora T è non degenere se e soltanto $\{x \in X : T(x,y) = 0 \text{ per ogni } y \in \mathcal{B}\} = \{0\}$. Se X è un $K-$spazio vettoriale, diremo duale algebrico di X il K spazio vettoriale $\mathrm{Hom}(X,K)$ delle applicazioni $K-$lineari $X \longrightarrow K$.

1.3 OSSERVAZIONE. Se X un $K-$spazio vettoriale di dimensione finita n, $\mathrm{Hom}(X,K)$ ha dimensione n. Infatti se $\{x_1, \ldots, x_n\}$ è una base di X e, per ogni $i \in \{i, \ldots, n\}$, $x_i^* : X \longrightarrow K$ è l'unica applicazione $K-$lineare tale che

$$x_i^*(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \\ 0 & \text{se } j \neq i \end{cases},$$

allora è immediatamente visto che $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ è una base di $\mathrm{Hom}(X,K)$.

1.4 LEMMA. *Sia X un $K-$spazio vettoriale e $T : X \times X \longrightarrow K$ una forma bilineare. Allora valgono le seguenti asserzioni.*

(i) *Per ogni $x \in X$, l'applicazione $T_x : X \longrightarrow K$, $y \mapsto T(x,y)$, è $K-$lineare.*

(ii) *Le seguenti condizioni sono equivalenti.*

   (1) *T è non degenere.*

(2) *T è simmetrica e l'applicazione $K-$lineare $\phi_T : X \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,K)$, $x \mapsto T_x$, è iniettiva.*

(iii) *Se T è non degenere e X ha dimensione finita, allora ϕ_T è un isomorfismo.*

Dimostrazione. (i) e (ii) sono conseguenze immediate delle definizioni. (iii) segue da (ii) e dal fatto che $\dim_K(X) = \dim_K(\mathrm{Hom}(X,K))$, stante l'Osservazione (1.4). □

1.5 Definizione. *Siano X un $K-$spazio vettoriale di dimensione finita n, $T : X \times X \longrightarrow K$ una forma bilineare non degenere, e $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base di X. Con le notazioni dell'Osservazione (1.3) e del Lemma (1.4), sia, per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, y_i l'unico elemento di X tale che $\phi_T(y_i) = x_i^*$ (ϕ_T è un isomorfismo). Allora la base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ di X si dice* base duale rispetto a $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e T.

Sia A un anello. Ricordiamo che un polinomio $f \in A[X_1, \ldots, X_n]$ si dice simmetrico se, per ogni permutazione σ di $\{1, \ldots, n\}$, si ha $f(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) = f(X_1, \ldots, X_n)$.
Useremo il seguente importante risultato sui polinomi simmetrici.

1.6 Teorema. *Siano A un dominio, $f \in A[X]$ un polinomio monico, L un campo contenente A e le radici $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in$ (non necessariamente distinte) di f. Allora, per ogni polinomio simmetrico $p \in A[X_1, \ldots, X_r]$, si ha $p(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in A$.*

Ricordiamo che se L/K è un ampliamento di campi finito e $\overline{K}$ è una chiusura algebrica di K, allora l'insieme $\mathcal{I}(L/K)$ delle $K-$immersioni $L \longrightarrow \overline{K}$ è finito, e ha cardinalità al più $[L : K]$. Vale l'uguaglianza se L/K è anche separabile. Se $x \in L$ e f è il polinomio minimo di x su K, allora non è difficile vedere che l'insieme dei coniugati di x (ovvero le radici di f in $\overline{K}$) è $\{\sigma(x) : \sigma \in \mathcal{I}(L/K)\}$.

1.7 Definizione. *Siano L/K un ampliamento di campi finito, $\overline{K}$ una chiusura algebrica di K, $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ le $K-$immersioni di L. Se $x \in L$, diremo* traccia *di x l'elemento $\mathrm{Tr}_{L/K}(x) := \sum_{i=1}^r \sigma_i(x)$. Per ogni sottoinsieme B di L poniamo $\mathrm{Tr}_{L/K}(B) := \{\mathrm{Tr}_{L/K}(x) : x \in B\}$.*

1.8 Proposizione. *Sia L/K un ampliamento di campi finito. Allora l'applicazione $T : L \times L \longrightarrow K$, $(x,y) \mapsto \mathrm{Tr}_{L/K}(xy)$, è una forma bilineare.*

Dimostrazione. Siano $x \in L$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ le $K-$immersioni di L, $f \in K[X]$ il polinomio minimo di x su K. Allora, poiché le radici di f in $\overline{K}$ sono $\sigma_1(x), \ldots, \sigma_r(x)$ e il polinomio $p(X_1, \ldots, X_r) = \sum_{i=1}^{r} X_i \in K[X_1, \ldots, X_r]$ è simmetrico, dal Teorema (1.6) segue immediatamente $\mathrm{Tr}_{L/K}(x) \in K$. Dunque T ha valori in K. Il fatto che T è bilineare segue tenendo presente che le applicazioni σ_i sono omomorfismi di anelli che fissano K. $\square$

Dalle definizioni e dall'Osservazione (1.2), segue facilmente la seguente caratterizzazione delle forme bilineari non degeneri.

1.9 Proposizione. *Siano X un $K-$spazio vettoriale di dimensione finita, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una sua base, e $T : X \times X \longrightarrow K$ una forma bilineare. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(1) *T è non degenere.*

(2) *La matrice di termine generale $T(x_i, x_j)$ ($1 \leq i, j \leq n$) è simmetrica e ha determinante non nullo.*

Ai nostri fini, sarà cruciale il seguente risultato.

1.10 Teorema. *Sia L/K un ampliamento di campi finito e separabile. Allora la forma bilineare $X \times X \longrightarrow K$, $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{L/K}(xy)$ (Proposizione (1.8)) è non degenere.*

Dimostrazione. Per il Teorema dell'elemento primitivo, esiste un elemento $\alpha \in L$ tale che $L = K(\alpha)$. In particolare, se $n = [L : K]$, l'insieme $\{1, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ è una base di L su K. Dunque, a norma della Proposizione (1.9), sarà sufficiente dimostrare che la matrice C di termine generale $\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha^{i+j})$ ($0 \leq i, j \leq n-1$) ha determinante diverso da 0. Dette $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ le n $K-$immersioni di L, si ha $\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha^{i+j}) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(\alpha)$. Consideriamo adesso la matrice di Vandermonde

$$V := \begin{pmatrix} 1 & \sigma_1(\alpha) & \ldots & \sigma_1(\alpha)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \sigma_n(\alpha) & \ldots & \sigma_n(\alpha)^{n-1} \end{pmatrix},$$

il cui determinante, come è ben noto, è $\prod_{1 \leq i < j \leq n}(\sigma_i(\alpha) - \sigma_j(\alpha))$. Si verifica immediatamente che la matrice C coincide con ${}^tVV$. Pertanto $\det(C) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(\sigma_i(\alpha) - \sigma_j(\alpha))^2$. A questo punto, per concludere la dimostrazione basta tenere presente che $\sigma_1(\alpha), \ldots, \sigma_n(\alpha)$ sono le radici in $\overline{K}$ del polinomio minimo di α su K e che L/K è un ampliamento di campi separabile. $\square$

2 Preliminari di Algebra Commutativa

2.1 Lemma. *Sia X un A-modulo. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) $X = \{0\}$.

(2) $X_{\mathfrak{p}} = \{0\}$ *per ogni ideale primo* $\mathfrak{p}$ *di* A.

(3) $X_{\mathfrak{m}} = \{0\}$ *per ogni ideale massimale* $\mathfrak{m}$ *di* A.

Dimostrazione. L'unica implicazione non banale è (3) $\Rightarrow$ (1). Sia $X_{\mathfrak{m}} = \{0\}$ per ogni $\mathfrak{m}$ ideale massimale di A e supponiamo che $X \neq \{0\}$. Fissiamo un elemento $x \in X$ tale che $x \neq 0$ e sia $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}_A(x)$. Per l'assunzione fatta, $\mathfrak{a}$ è un ideale proprio ed è quindi contenuto in un ideale massimale $\mathfrak{m}$. Consideriamo l'elemento $\frac{x}{1} \in X_{\mathfrak{m}}$. Dato che $X_{\mathfrak{m}} = 0$, esiste un elemento $a \in A \setminus \mathfrak{m}$ tale che $ax = 0$ e ciò è assurdo perchè $\mathrm{Ann}_A(x) \subseteq \mathfrak{m}$. $\square$

2.2 Lemma. *Siano $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ due ideali di un anello A tali che $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$. Siano, inoltre, $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}'$ due ideali di A tali che ogni $a \in \mathfrak{a}$ (risp. $b \in \mathfrak{b}$) ha una potenza in $\mathfrak{a}'$ (risp. in $\mathfrak{b}'$). Allora $\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' = A$.*

2.3 Proposizione. *Siano $A \subseteq A'$ un ampliamento integrale ed $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di A. Supponiamo, inoltre, che gli ideali massimali $\mathfrak{m}'$ di A' tali che $\mathfrak{m}' \cap A = \mathfrak{m}$ siano in numero finito. Allora, detti $\mathfrak{m}'_j$, $1 \leq j \leq n$, i massimali di A' e indicata con $\mathfrak{q}'_j = \{a' \in A' : [\exists s \notin \mathfrak{m}'_j : sa' \in \mathfrak{m}A]\}$ la saturazione di $\mathfrak{m}A$ rispetto a $\mathfrak{m}'_j$, valgono le condizioni seguenti:*

(i) *i divisori dello zero di $A'/\mathfrak{q}'_j$ sono gli elementi di $\mathfrak{m}'_j/q'_j$ ed essi sono nilpotenti ($1 \leq j \leq n$).*

(ii) $\mathfrak{m}A' = \bigcap_j \mathfrak{q}'_j = \prod_j \mathfrak{q}'_j$.

(iii) *L'omomorfismo canonico $A'/\mathfrak{m}A' \longrightarrow \prod_j (A'/\mathfrak{q}'_j)$ è biiettivo.*

Dimostrazione. Dato che $\mathfrak{m}$ è massimale in A, gli unici ideali primi di A' che contengono $\mathfrak{m}A'$ sono gli $\mathfrak{m}'_j$, quindi $\mathrm{rad}(\mathfrak{m}A') = \bigcap_j \mathfrak{m}'_j$. Per definizione di $\mathfrak{q}'_j$, il rappresentante modulo $\mathfrak{q}'_j$ di un elemento $x \in A' - \mathfrak{m}'_j$ non è un divisore dello zero in $A'/\mathfrak{q}'_j$; d'altra parte, essendo gli $\mathfrak{m}'_j$ massimali distinti, esiste un elemento $a'_j \in (\bigcap_{i \neq j} \mathfrak{m}'_i) \setminus \mathfrak{m}'_j$ per ogni j. Adesso, se consideriamo un qualunque $y \in \mathfrak{m}'_j$ otteniamo $a'_j y \in \mathrm{rad}(\mathfrak{m}A')$, dunque la classe modulo $\mathfrak{q}'_j$ di $a'_j y$ è nilpotente. Dal momento che $a'_j + \mathfrak{q}'_j$ non è un divisore dello zero in $A'/\mathfrak{q}'_j$, possiamo concludere che $y + \mathfrak{q}'_j$ è nilpotente e che $\mathrm{rad}(\mathfrak{q}'_j) = \mathfrak{m}'_j$. Questo prova la (i). Dal Lemma 2.2 segue che $\mathfrak{q}'_j + \mathfrak{q}'_i = A$ per ogni $i \neq j$, la (iii) sarà una banale conseguenza della (ii). Proviamo, quindi, la (ii). Osserviamo che gli unici massimali dell'anello $A'/\mathfrak{m}A'$ sono del tipo $\mathfrak{m}'_j/\mathfrak{m}A'$ e che, per ogni j, l'ideale $\mathfrak{q}'_j/\mathfrak{m}A'$ costituisce la saturazione di (0) rispetto a $\mathfrak{m}'_j/\mathfrak{m}A'$.

Dunque è lecito ridursi al caso $\mathfrak{m}A' = (0)$. L'asserzione segue, adesso, dal Lemma 2.1. □

2.4 Lemma. *Siano $H \subseteq G$, $H' \subseteq G'$, $H'' \subseteq G''$ tre inclusioni di gruppi. Supponiamo, inoltre, che il seguente diagramma*

$$\begin{array}{ccccccccc}
(0) & \longrightarrow & H' & \xrightarrow{u} & H & \xrightarrow{v} & H'' & \longrightarrow & (0) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle i'} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i''} & & \\
(0) & \longrightarrow & G' & \xrightarrow{\alpha} & G & \xrightarrow{\beta} & G'' & \longrightarrow & (0)
\end{array}$$

sia esatto e commutativo. Allora la sequenza

$$(0) \longrightarrow G'/H' \longrightarrow G/H \longrightarrow G''/H'' \longrightarrow (0)$$

è esatta.

Dimostrazione. Sia $\overline{\alpha} : G'/H' \longrightarrow G/H$ l'omomorfismo $g' + H' \mapsto \alpha(g') + H$ e, analogamente, sia $\overline{\beta} : G/H \longrightarrow G''/H''$ la mappa $g + H \mapsto \beta(g) + H''$.

Le applicazioni $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ sono ben poste; infatti siano $g'_1, g'_2 \in G'$ tali che $g'_1 - g'_2 \in H'$. Poiché $\alpha(g'_1 - g'_2) = (\alpha \circ i')(g'_1 - g'_2) = (i \circ u)(g'_1 - g'_2) = u(g'_1 - g'_2) \in H$, allora $\alpha(g'_1) + H = \alpha(g'_2) + H$. In modo simile si prova la buona definizione di $\overline{\beta}$.

Supponiamo, adesso, che esistano due elementi $g'_1, g'_2 \in G'$ tali che

$\alpha(g'_1 - g'_2) \in H$. Dalle ipotesi segue che

$$0 = (\beta \circ i \circ \alpha)(g'_1 - g'_2) = (i'' \circ v \circ \alpha)(g'_1 - g'_2) = (v \circ \alpha)(g'_1 - g'_2) = v(\alpha(g'_1 - g'_2)).$$

Quindi, esiste $h' \in H'$ tale che $u(h') = \alpha(g'_1 - g'_2)$.

Infine, dato che $u(h') = (i \circ u)(h') = (\alpha \circ i')(h') = \alpha(h')$ allora $h' = g'_1 - g'_2 \in H'$. Questo prova l'iniettività di $\overline{\alpha}$.

Ovviamente $\overline{\alpha}(G'/H') \subseteq \mathrm{Ker}(\overline{\beta})$.

Sia $g \in G$ tale che $\beta(g) \in H''$; dall'esattezza del diagramma segue che esiste $h \in H$ con $v(h) = \beta(g)$. Poiché $v(h) = (i'' \circ v)(h) = (\beta \circ i)(h) = \beta(h)$, allora $g - h \in \mathrm{Ker}(\beta)$. Dunque, esiste $g' \in G'$ tale che $\alpha(g') = g - h$.

La suriettività di $\overline{\beta}$ segue, banalmente, da quella di β. $\square$

Ricordiamo alcuni fatti sui moduli.

2.5 Proposizione. *Siano A un anello e X un $A-$modulo. Allora valgono le seguenti asserzioni.*

(i) *Se X è Noetheriano, tutti i sottomoduli di X sono finitamente generati.*

(ii) *Se A è Noetheriano e X è finitamente generato, allora X è Noetheriano.*

Il seguente fatto è una conseguenza immediata del Teorema della Base di Hilbert.

2.6 Proposizione. *Sia B/A un ampliamento di anelli di tipo finito. Se A è un anello Noetheriano, tale è anche B.*

Mostriamo adesso la fondamentale conseguenza del Teorema (1.10).

2.7 Teorema. *Siano A un dominio integralmente chiuso con campo dei quozienti K, L/K un ampliamento di campi finito, B la chiusura integrale di A in L. Allora valgono le seguenti asserzioni.*

(i) $\mathrm{Tr}_{L/K}(B) \subseteq A$.

Supponiamo inoltre che A sia Noetheriano e che L/K sia separabile. Allora:

(ii) *L'insieme $D := \{x \in L : \mathrm{Tr}_{L/K}(xB) \subseteq A\}$ è un $A-$modulo finitamente generato.*

(iii) *Si ha $B \subseteq D$ e inoltre B è un $A-$modulo finitamente generato.*

(iv) *B è un anello Noetheriano.*

Dimostrazione. (i). Sia $x \in L$ intero su A. Allora, per ogni $\sigma \in \mathcal{I}(L/K)$, l'elemento $\sigma(x) \in \overline{K}$ è intero su A, in quanto ogni elemento di $\mathcal{I}(L/K)$ fissa A, in particolare. Quindi $\mathrm{Tr}_{L/K}(x)$ è un elemento di K intero su A. Dunque, dal fatto che A è integralmente chiuso segue (i).
(ii). Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di L su K. In particolare, gli elementi di tale base sono algebrici su K, e quindi, per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, esistono un intero positivo m_i, $a_{1i}, \ldots, a_{m_i i} \in A, \alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{m_i i} \in A \backslash \{0\}$ tali che

$$v_i^{m_i} + \frac{a_{1i}}{\alpha_{1i}} v_i^{m_i - 1} + \ldots + \frac{a_{m_i i}}{\alpha_{m_i i}} = 0.$$

Posto $s_i = \prod_{j=1}^{m_i} \alpha_{ji}^n$ (si tenga presente che i è fissato), si ha subito che $u_i := s_i v_i$ è intero su A. Inoltre è facile verificare che $\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq B$ è una base di L su K. Poiché, in virtù del Teorema (1.10), la forma bilineare $T : L \times L \longrightarrow K$, $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{L/K}(xy)$, è non degenere, allora esiste una base duale $\{y_1, \ldots, y_n\}$ di L su K rispetto a $\{u_1, \ldots, u_n\}$ e alla forma bilineare T. Equivalentemente, con le notazioni dell'Osservazione (1.2) e del Lemma (1.4), si ha $T_{y_i} = u_i^*$, per $i = 1, \ldots, n$. Sia adesso $V :=< y_1, \ldots, y_n >_A$, e sia $d \in D$. Allora esistono elementi $k_1, \ldots, k_n \in K$ tali che $d = \sum_{i=1}^n k_i y_i$. Fissiamo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Per costruzione si ha $\mathrm{Tr}_{L/K}(du_i) \in A$. D'altra parte

$$\mathrm{Tr}_{L/K}(du_i) = \mathrm{Tr}_{L/K}(u_i \sum_{j=1}^n k_j y_j) = \sum_{j=1}^n k_j T_{y_j}(u_i) = \sum_{j=1}^n k_j u_j^*(u_i) = k_i.$$

Questo prova che $D \subseteq V$. Inoltre è immediatamente visto che D è un $A-$sottomodulo di V. Essendo A un anello Noetheriano e V finitamente generato su A, V è un $A-$modulo Noetheriano (Proposizione (2.5(ii))). Dunque D è finitamente generato su A (Proposizione (2.5(i))).
(iii). In virtù di (1) si ha subito $B \subseteq D$. A questo punto basta osservare che D è un $A-$modulo Noetheriano, per (ii) e per la Proposizione (2.5(ii)). Poiché B è ovviamente un $A-$sottomodulo di D, segue che B è finitamente generato su A (Proposizione (2.5(i))).
(iv) Per (iii), l'ampliamento di anelli B/A è finito e, in particolare, di tipo finito. A questo punto basta usare la Proposizione (2.6). □

3 Gruppi topologici e completamenti

In questa sezione ricorderemo come si possano estendere ai gruppi topologici le nozioni di successione di Cauchy e di completamento.

3.1 DEFINIZIONE. *Sia G un gruppo abeliano scritto additivamente. Diremo che G è un* gruppo topologico *se G è munito di una topologia compatibile con la sua struttura di gruppo, ovvero se le applicazioni $G \times G \longrightarrow G$, $(x, y) \mapsto x + y$ e $G \longrightarrow G$, $x \mapsto -x$ sono continue.*

3.2 ESEMPIO. (i) Un gruppo discreto è un gruppo topologico.

(ii) I gruppi additivi $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ muniti della topologia euclidea sono gruppi topologici.

Sarà spesso utile il seguente fatto di Topologia Generale.

3.3 PROPOSIZIONE. *Sia X uno spazio topologico. Allora X è di Hausdorff se e soltanto se la diagonale $\Delta_2 = \{(x, x) : x \in X\}$ è chiusa nel prodotto $X \times X$.*

La seguente semplicissima osservazione mette in luce l'importanza degli intorni dello 0 di un gruppo topologico.

3.4 PROPOSIZIONE. *Siano G un gruppo topologico, $\mathcal{F}$ un sistema fondamentale di intorni aperti dello 0. Allora valgono le seguenti asserzioni.*

(i) *Per ogni $x \in G$, l'applicazione $T_x : G \longrightarrow G$ definita ponendo $T_x(y) = x + y$ è un omeomorfismo.*

(ii) *Per ogni $x \in G$, la collezione $\mathcal{F}_x := \{x + U : U \in \mathcal{F}\}$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di x. Dunque la topologia di G è determinata univocamente dagli intorni dello 0.*

(iii) *L'intersezione H di tutti gli intorni dello 0 è un sottogruppo di G, e si ha $\bigcap \mathcal{F} = H = \mathrm{Ad}_G(\{0\})$.*

(iv) *G è uno spazio di Hausdorff se e soltanto se $\bigcap \mathcal{F} = \{0\}$.*

(v) *Sia U è un intorno di 0. Allora $-U$ è un intorno di 0. Inoltre esiste un intorno V di 0 tale che $V + (-V) \subseteq U$.*

(vi) *Se L è un arbitrario sottoinsieme di G, allora*

$$\mathrm{Ad}_{G}(L) = \bigcup_{U\in\mathcal{F}} (L+U)$$

(vii) *Se U, V sono insiemi aperti di G, allora $U+V$ è aperto.*

Dimostrazione. La (i) segue immediatamente dal fatto che l'applicazione T_{-x} è l'inversa di T_x e che T_x è continua per costruzione. Per provare la (ii), fissiamo $x \in G$ è un intorno Ω di x. Poiché l'applicazione T_x è, in particolare, continua in 0 (per la (i)), esiste un elemento $U \in \mathcal{F}$ tale che $T_x(U) = x + U \subseteq \Omega$. Inoltre $x + U$ è un intorno aperto di x in quanto T_x è aperta. Siano $x, y \in H$ e sia U un intorno dello 0. Poiché la somma è continua, esistono intorni T_1, T_2 di x, y rispettivamente, tali che $T_1+T_2 \subseteq x+y+U$, e, in virtù della (ii), non è restrittivo supporre che $T_1 = x + V_1, Y_2 = y + V_2$, per opportuni intorni V_1, V_2 di 0. Poiché, per ipotesi, $x \in V_2, y \in V_1$, si ha $2x + 2y \in x + y + U$, e quindi $x + y \in U$. Per l'arbitrarietà di U, si ottiene $x+y \in H$. Facendo uso della continuità della funzione $x \mapsto -x$, si prova che $-x \in H$, per ogni $x \in H$. Dunque H è un sottogruppo di G. L'uguaglianza $H = \bigcap \mathcal{F}$ è una conseguenza immediata delle definizioni. Se $x \in H$, allora si ha $0 \in U$, per ogni $U \in \mathcal{F}_x$ (in quanto $-x$ appartiene a ogni intorno di 0), e quindi $x \in \mathrm{Ad}_{G}(\{0\})$. L'inclusione inversa segue dal fatto che le precedenti asserzioni sono equivalenti. Così la (iii) è provata. Supponiamo che G sia di Hausdorff e sia $x \in \bigcap \mathcal{F}$. Se fosse $x \neq 0$, esisterebbe un intorno di 0 disgiunto da un intorno di x, contro il fatto che $x \in H = \bigcap \mathcal{F}$. Viceversa, supponiamo che che $\bigcap \mathcal{F} = \{0\}$, ovvero $\{0\}$ è chiuso, per (iii). Consideriamo la funzione $f : G \times G \longrightarrow G$ definita ponendo $f((x, y)) = x-y$. Allora f è continua, per definizione di gruppo topologico, e quindi $f^{-1}(0) = \{(x, x) : x \in G\}$ è chiuso in $G \times G$. Allora basta tenere presente la Proposizione (3.3). La prima parte di (v) segue immediatamente dal fatto che la funzione $x \mapsto -x$ è continua in 0. Per provare la seconda parte, osserviamo che esistono intorni V_1, V_2 di 0 tali che $V_1+V_2 \subseteq U$. Poiché $-V_1, -V_2$ sono intorni di 0, tali saranno anche gli insiemi $V_1 \cap (-V_2), V_2 \cap (-V_1)$. Posto $V := V_1 \cap (-V_2)$, si ha $-V = V_2 \cap (-V_1)$ e quindi $V + (-V) \subseteq U$. Siano adesso L un sottoinsieme di G, $x \in \mathrm{Ad}_{G}(L)$ e $U \in \mathcal{F}$. In virtù di (v) e (i), $x - U$ è un intorno di x e quindi esistono $u \in U, l \in L$ tali che $x - u = l$, ovvero $x \in L + U$. Per l'arbitrarietà di U si ha subito $x \in \bigcap_{U\in\mathcal{F}} (U+L)$. Viceversa, sia $x \in U + L$, per ogni $U \in \mathcal{F}$, e sia Ω un intorno di x. Per la (ii), esiste un elemento $U^* \in \mathcal{F}$ tale che $x + U^* \subseteq \Omega$.

Poiché $-U^*$ è un intorno di 0 (per la (v)), esiste $V \in \mathcal{F}$ tale che $V \subseteq -U^*$. Per ipotesi, possiamo prendere $l \in L, v \in V, u \in U^*$ tali che $x = l + v$ e $v = -u$, ovvero $l \in (x + U^*) \cap L \subseteq \Omega \cap L$. Questo prova la (vi). Infine, se U, V sono insiemi aperti, si ha $U + V = \bigcup_{x \in U}(x + V)$, e quindi $U + V$ è aperto (per la (ii)). $\square$

Noi ci occuperemo prevalentemente di gruppi topologici aventi un sistema fondamentale di intorni costituito da sottogruppi. Adesso introdurremo una tecnica per costruire gruppi topologici a partire da un sistema fondamentale di intorni dello 0 costituito da sottogruppi. Serve il seguente risultato di Topologia Generale, di immediata verifica.

3.5 Proposizione. *Sia X un insieme. Per ogni $x \in X$, sia $\mathcal{F}_x$ una collezione non vuota di sottoinsiemi di X tale che*

(i) *$x \in A$, per ogni $A \in \mathcal{F}_x$.*

(ii) *Se $A, B \in \mathcal{F}_x$, allora esiste $C \in \mathcal{F}_x$ tale che $C \subseteq A \cap B$.*

(iii) *Se $A \in \mathcal{F}_x$ e $y \in A$, allora esiste un elemento $B \in \mathcal{F}_y$ tale che $B \subseteq A$.*

Allora esiste una e una sola topologia su X tale che $\mathcal{F}_x$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di x, per ogni $x \in X$.

3.6 Proposizione. *Siano G un gruppo e $\mathcal{F}$ una collezione di sottogruppi di G tale che per ogni $H_1, H_2 \in \mathcal{F}$ esiste un sottogruppo $H_3 \in \mathcal{F}$ tale che $H_3 \subseteq H_1 \cap H_2$. Posto, per ogni $x \in G$, $\mathcal{F}_x = \{x + H : H \in \mathcal{F}\}$, $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, esiste una e una sola topologia su G per la quale $\mathcal{F}_x$ è un sistema fondamentale di intorni per x. Inoltre tale topologia rende G un gruppo topologico.*

Dimostrazione. Per provare la prima parte dell'asserzione, sarà sufficiente far vedere che le condizioni (i), (ii), (iii) della Proposizione (3.5) vengono soddisfatte. La (i) segue dal fatto che gli elementi di H contengono 0. La (ii) segue dalla proprietà di $\mathcal{F}$. Per provare (iii), fissiamo $x \in G$, $H \in \mathcal{F}$ e $y \in x + H$. Allora, poiché H è un sottogruppo, si ha $y + H \subseteq x + H$, ovvero la (iii) vale. Resta dunque da fare vedere che la topologia definita nella prima parte dell'asserzione è compatibile con la struttura di gruppo di G. Proviamo che la somma è continua. Siano $x, y \in G$ e sia Ω un intorno aperto di $x + y$. Poiché $\mathcal{F}_{x+y}$ è un sistema fondamentale di intorni di $x + y$, possiamo assumere, senza perdita di generalità, che $\Omega = x + y + H$, per qualche $H \in \mathcal{F}$. Allora, per come la topologia prodotto è definita, l'insieme $V = (x + H) \times (y + H)$ è un intorno aperto di (x, y) e si ha $z + z' \in \Omega$, per ogni $(z, z') \in V$, essendo H un sottogruppo. Questo prova la continuità della somma. La continuità della funzione $G \longrightarrow G$, $x \mapsto -x$ segue immediatamente dal fatto che $-(x + H) = -x + H$, per ogni $H \in \mathcal{F}$. □

Nel seguito sudieremo la convergenza di successioni un po' diverse da quelle cui siamo abituati. Infatti, per successione di elementi di un insieme X in genere si intende l'immagine di una funzione $\mathbb{N} \longrightarrow X$. Noi invece estenderemo questa definizione sostituendo $\mathbb{N}$ con opportuni insiemi ordinati.

3.7 Definizione. (1) *Sia* $(\Lambda, \leq)$ *un insieme preordinato. Diremo che* Λ *è* filtrante *se per ogni* $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ *esiste un elemento* $\lambda \in \Lambda$ *tale che* $\lambda_1 \leq \lambda, \lambda_2 \leq \lambda$.

(2) *Sia* X *un insieme. Diremo* successione generalizzata *in* X *l'immagine di una funzione* $\Lambda \longrightarrow X$*, dove* Λ *è un insieme filtrante. Indicheremo una successione generalizzata con* $(x_\lambda)_\Lambda$ *(ovvero* x_λ *denota l'immagine di* λ *in* X*, per ogni* $\lambda \in \Lambda$*)*

3.8 Osservazione. (i) L'insieme delle parti di un insieme, ordinato dall'inclusione, è un insieme filtrante. Ogni insieme bene ordinato è filtrante. In particolare ogni insieme totalmente ordinato è filtrante.

(ii) Ogni successione $(x_n)_\mathbb{N}$ è una successione generalizzata.

(iii) Se Λ e Δ sono insiemi filtranti, allora il prodotto $\Lambda \times \Delta$ è in modo naturale un insieme filtrante con l'ordine definito ponendo

$$(\lambda, \delta) \leq (\lambda_1, \delta_1) :\Longleftrightarrow \lambda \leq \lambda_1, \delta \leq \delta_1.$$

Diremo *ordine indotto* l'ordine naturale definito sopra sul prodotto $\Lambda \times \Delta$. Quando considereremo il prodotto di insiemi filtranti, intenderemo, salvo esplicita indicazione, tale prodotto un insieme filtrante con l'ordine indotto.

(iv) Siano X uno spazio topologico, $x \in X$ e $\mathcal{F}$ un sistema fondamentale di intorni di x. Posto $U \leq V :\Longleftrightarrow V \subseteq U$, per ogni $U, V \in \mathcal{F}$, si vede immediatamente che la relazione $\leq$ stabilisce un ordine filtrante in $\mathcal{F}$: infatti, se $U, V \in F$, allora, in particolare, $U \cap V$ è un intorno di x, e pertanto esiste un elemento $W \in \mathcal{F}$ tale che $W \subseteq U \cap V$, ovvero $W \geq U, V$.

(v) Dalla definizione segue immediatamente che, se Λ è un insieme filtrante e Λ_0 è un sottoinsieme finito di Λ, allora esiste un elemento $\lambda' \in \Lambda$ tale che $\lambda' \geq \lambda$, per ogni $\lambda \in \Lambda_0$.

Il prossimo passo è definire la nozione di convergenza di una successione generalizzata in uno spazio topologico.

3.9 Definizione. *Sia X uno spazio topologico e $(x_\lambda)_\Lambda$ una successione generalizzata a termini in X. Si dice che $(x_\lambda)_\Lambda$* converge *a un elemento $x \in X$, e si scrive $x \in \lim_\Lambda(x_\lambda)$, se per ogni intorno U di x esiste un elemento $\lambda_U \in \Lambda$ tale che $x_\lambda \in U$, per ogni $\lambda \geq \lambda_U$. Quando $\lim_\Lambda(x_\lambda)$ ha un unico elemento x, si porrà, con un piccolo abuso di notazione, $x = \lim_\Lambda(x_\lambda)$.*

3.10 Osservazione. (i) Ogni successione generalizzata definitivamente costante converge.

(ii) Se X è uno spazio di Hausdorff, allora ogni successione generalizzata $(x_\lambda)_\Lambda \subseteq X$ converge ad al più un punto. Infatti, supponiamo, per assurdo, che l'insieme $\lim_\Lambda(x_\lambda)$ contiene due punti distinti x, y distinti. Poiché X è di Hausdorff, fissiamo intorni disgiunti U, V di x, y rispettivamente. Fissiamo quindi elementi $\lambda_U, \lambda_V \in \Lambda$ tali che $x_\lambda \in U$ per ogni $\lambda \geq \lambda_U$, e $x_\lambda \in V$, per ogni $\lambda \geq \lambda_V$. Preso un elemento $\lambda \geq \lambda_U, \lambda_V$, si avrebbe $x_\lambda \in U \cap V$, una contraddizione.

(iii) Se G è un gruppo topologico e $(x_\lambda)_\Lambda$, $(y_\delta)_\Delta$ sono successioni generalizzate, allora possiamo considerare la successione generalizzata $(x_\lambda + y_\delta)_{\Lambda\times\Delta}$, dove $\Lambda \times \Delta$ ha l'ordine indotto. Inoltre, se G ha un sistema fondamentale di intorni dello 0 costituito da sottogruppi e $x \in \lim_\Lambda(x_\lambda)$, $y \in \lim_\Delta(y_\delta)$, allora è facile verificare che $x + y \in \lim_{\Lambda\times\Delta}(x_\lambda + y_\delta)$.

(iv) Siano X, Y spazi topologici e $f : X \longrightarrow Y$ una funzione continua. Se $(x_\lambda)_\Lambda \subseteq X$ è una successione generalizzata, allora $f(\lim_\Lambda(x_\lambda)) \subseteq \lim_\Lambda(f(x_\lambda))$. In particolare, se X è un sottospazio di Y, e $(x_\lambda)_\Lambda \subseteq X$

è una successione generalizzata convergente, allora essa è convergente anche se pensata come successione generalizzata in Y.

(v) Siano X uno spazio topologico, Y un suo sottospazio e $(x_\lambda)_\Lambda \subseteq X$ una successione generalizzata. Se esiste un elemento $\lambda_0 \in \Lambda$ tale che $\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\} \subseteq Y$, allora $\lim_\Lambda(x_\lambda) \subseteq \mathrm{Ad}_X(Y)$. Sia infatti x un elemento di $\lim_\Lambda(x_\lambda)$ e sia U un arbitrario intorno di x. Allora esiste un elemento $\nu_U \in \Lambda$ tale che $x_\lambda \in U$, per ogni $\lambda \geq \nu_U$. Fissato dunque un elemento $\lambda \geq \lambda_0, \nu_U$ (Λ è filtrante), si ha $x_\lambda \in Y \cap U$. Dunque $x \in \mathrm{Ad}_X(Y)$.

Particolarizziamo adesso l'ambiene nel quale ci vogliamo occupare della teoria della convergenza. Se consideriamo, anziché uno spazio topologico qualsiasi, un gruppo topologico, allora, potendo disporre degli intorni dello 0, possiamo dare la nozione di successione generalizzata di Cauchy.

3.11 Definizione. *Sia G un gruppo topologico. Una successione generalizzata $(x_\lambda)_\Lambda$ a termini in X si dice* di Cauchy *se per ogni intorno U di 0 esiste un elemento $\lambda_U \in \Lambda$ tale che $x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in U$, per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_U$.*

3.12 Osservazione. (i) Ogni successione generalizzata convergente è di Cauchy.

(ii) L'asserzione (i) non può essere invertita. Infatti, nel gruppo topologico additivo dei numeri razionali esistono successioni di Cauchy non convergenti.

(iii) Se $(x_\lambda)_\Lambda$, $(y_\delta)_\Delta$ sono successioni generalizzate di Cauchy, allora $(x_\lambda + y_\delta)_{\Lambda\times\Delta}$ è di Cauchy.

(iv) Se $f : G \longrightarrow H$ è un omomorfismo continuo di gruppi topologici e $(x_\lambda)_\Lambda \subseteq G$ è una successione generalizzata di Cauchy, allora $(f(x_\lambda))_\Lambda$ è di Cauchy in H. In particolare, se G è un sottogruppo di H (e ha la topologia di sottospazio) e $(x_\lambda)_\Lambda \subseteq G$ è di Cauchy, essa è di Cauchy anche se pensata come successione generalizzata a termini in Y.

(v) Se $(x_\lambda)_\Lambda$ è una successione generalizzata di Cauchy e Λ' è un sottoinsieme filtrante di Λ (rispetto alla restrizione dell'ordine di Λ), allora la successione generalizzata estratta $(x_\tau)_{\Lambda'}$ è di Cauchy e inoltre $0 \in \lim_{\Lambda\times\lambda'}(x_\lambda - x_\tau)$.

(vi) Se G è un gruppo topologico discreto, allora è immediatamente visto che le successioni generalizzate di Cauchy in G sono precisamente quelle definitivamente costanti. Dunque un gruppo topologico discreto è completo.

Possiamo adesso introdurre la nozione centrale della sezione, quella di gruppo topologico completo.

3.13 Definizione. *Sia G un gruppo topologico. Diremo che G è* completo *se è di Hausdorff e se ogni successione generalizzata di Cauchy converge a un (unico) punto di G.*

3.14 Osservazione. Siano G un gruppo topologico completo e H un sottogruppo chiuso di G. Allora H completo. Infatti, una successione di Cauchy $(x_\lambda)_\Lambda$ a termini in H è di Cauchy anche se pensata a termini in G (Osservazione (3.12(iv))), e quindi converge a un unico punto $x \in \mathrm{Ad}_G(H) = H$ (Osservazione (3.10(v))).

Come abbiamo ricordato, esistono gruppi topologici non completi. Dunque il nostro prossimo obiettivo sarà quello di associare a ogni gruppo topologico un gruppo topologico completo. In qualche modo, si estenderà la costruzione del completamento di uno spazio metrico. La sostanziale differenza è nel fatto che nel completamento convergeranno tutte le successioni generalizzate.

3.15 Definizione. *Sia G un gruppo topologico che ha un sistema fondamentale di intorni dello 0 costituito da sottogruppi, e sia $\mathcal{C}$ la totalità di tutte le successioni generalizzate di Cauchy a termini in G. Due elementi $(x_\lambda)_\Lambda, (y_\delta)_\Delta \in \mathcal{C}$ si dicono* equivalenti*, e si pone $(x_\lambda)_\Lambda \mathscr{E} (y_\delta)_\Delta$, se $0 \in \lim\limits_{\Lambda\times\Delta}(x_\lambda - y_\delta)$.*

3.16 Osservazione. Siano G, $\mathscr{E}$ come nella Definizione (3.15).

(i) Sia $x \in G$ e siano Λ, Δ insiemi filtranti. Allora le successioni costanti $(x)_\Lambda, (x)_\Delta$ sono equivalenti.

(ii) Due successioni generalizzate $(x_\lambda)_\Lambda, (y_\delta)_\Delta \in \mathcal{C}$ sono equivalenti se e soltanto se $\lim\limits_\Lambda(x_\lambda) = \lim\limits_\Delta(y_\delta)$.

(iii) Tenendo presente l'Osservazione (3.10(3)), è facile verificare che la relazione binaria $\mathscr{E}$ definita su $\mathcal{C}$ è di equivalenza. Indicheremo, per ogni elemento $(x_\lambda)_\Lambda \in \mathcal{C}$, con $[(x_\lambda)_\Lambda]$ la sua classe di equivalenza.

3.17 DEFINIZIONE. *Con le notazioni e le ipotesi della Definizione (3.15), indicheremo con $\widehat{G}$ il quoziente $\mathcal{C}/\mathscr{E}$, e chiameremo $\widehat{G}$* completamento *di G.*

La scelta del nome completamento per $\widehat{G}$ ci fa intuire che il gruppo topologico completo associato a G è precisamente $\widehat{G}$. Il nostro obiettivo è adesso fornire una struttura di gruppo topologico completo a $\widehat{G}$.

3.18 PROPOSIZIONE. *Sia G un gruppo topologico avente un sistema fondamentale di intorni $\mathcal{F}$ dello 0 costituito da sottogruppi.*

(i) *La seguente operazione definita nell'insieme $\widehat{G}$ ponendo*

$$[(x_\lambda)_\Lambda] + [(y_\delta)_\Delta] := [(x_\lambda + y_\delta)_{\Lambda\times\Delta}], \quad \textit{per ogni } [(x_\lambda)_\Lambda], [(y_\delta)_\Delta] \in \widehat{G},$$

rende $\widehat{G}$ un gruppo abeliano il cui elemento neutro è la classe della successione nulla.

(ii) *Per ogni sottogruppo $U \in \mathcal{F}$ poniamo*

$$^\sharp U := \{[(x_\lambda)_\Lambda] \in \widehat{G} : [\exists \lambda_0 \in \Lambda : x_\lambda \in U \textit{ per ogni } \lambda \geq \lambda_0]\}.$$

Allora $^\sharp U$ è un sottogruppo di $\widehat{G}$. Siano $U, V \in \mathcal{F}$. Allora $^\sharp(U \cap V) = {}^\sharp U \cap {}^\sharp V$. Inoltre, se $U \subseteq V$, allora $^\sharp U \subseteq {}^\sharp V$.

(iii) *Poniamo $^\sharp\mathcal{F} := {}^\sharp\mathcal{F}_0 := \{^\sharp U : U \in \mathcal{F}\}$. Allora esiste una e una sola topologia su $\widehat{G}$ per la quale, per ogni $\eta \in \widehat{G}$, la collezione di insiemi $^\sharp\mathcal{F}_\eta := \{\eta + {}^\sharp U : U \in \mathcal{F}\}$ è un sistema fondamentale di intorni di η. Tale topologia dipende esclusivamente dalla topologia di G (e non da $\mathcal{F}$), e rende $\widehat{G}$ un gruppo topologico di Hausdorff.*

DIMOSTRAZIONE. Per mostrare che l'operazione di somma in $\widehat{G}$ è ben definita, occorre verificare che se $(x_\lambda)_\Lambda$ è equivalente a $(x'_\gamma)_\Gamma$ e $(y_\delta)_\delta$ è equivalente a $(y'_\epsilon)_E$, allora $(x_\lambda + y_\delta)_{\Lambda\times\Delta}$ è equivalente a $(x'_\gamma + y'_\epsilon)_{\Gamma\times E}$. Per ipotesi $0 \in \lim\limits_{\Lambda\times\Gamma}(x_\lambda - x'_\gamma)$ e $0 \in \lim\limits_{\Delta\times E}(y_\delta - y'_\epsilon)$. Allora $0 \in \lim\limits_{(\Lambda\times\Gamma)\times(\Delta\times E)}(x_\lambda + y_\delta - x'_\gamma - y'_\epsilon) = \lim\limits_{(\Lambda\times\Delta)\times(\Gamma\times E)}(x_\lambda + y_\delta - x'_\gamma - y'_\epsilon)$, per l'Osservazione (3.10(i)). Così l'operazione di somma in $\widehat{G}$ è ben definita, e dal fatto che G è un gruppo segue immediatamente che $\widehat{G}$ è un gruppo. Così (i) è provata. Se U è un sottogruppo di G, mostriamo che ${}^\sharp U$ è un sottogruppo di $\widehat{G}$. Intanto ${}^\sharp U$ è un ben definito insieme. Infatti se $[(x_\lambda)_\Lambda] \in {}^\sharp U$ e $(y_\delta)_\Delta$ è una successione generalizzata di Cauchy equivalente a $(x_\lambda)_\Lambda$, allora, per definizione, esistono elementi $\lambda_U \in \Lambda, \delta_U \in \Delta$ tali che $x_\lambda - y_\delta \in U$, per ogni $(\lambda, \delta) \geq (\lambda_U, \delta_U)$. Per come è stata scelta $(x_\lambda)_\Lambda$, esiste un elemento $\lambda_0 \in \Lambda$ tale che $x_\lambda \in U$, per ogni $\lambda \geq \lambda_0$. Consideriamo un elemento $\lambda_1 \in \Lambda$ tale che $\lambda_U, \lambda_0 \leq \lambda_1$. Allora, per ogni $\delta \geq \delta_U$, si ha $y_\delta = y_\delta - x_{\lambda_1} + x_{\lambda_1} \in U$, essendo U un sottogruppo, in particolare. Dunque $[(y_\delta)_\Delta] \in {}^\sharp U$, che è quanto serviva per mostrare che ${}^\sharp U$ è ben definito. Dalla definizione dell'operazione in $\widehat{G}$ e dal fatto che U è un sottogruppo di G, segue immediatamente che ${}^\sharp U$ è un sottogruppo di $\widehat{G}$. La parte finale dell'asserzione (ii) è una una semplice conseguenza delle definizioni. Proviamo la (iii). Poiché $\mathcal{F}$ è un sistema fondamentale di intorni dello 0 di G, per ogni $U_1, U_2 \in \mathcal{F}$, esiste un elemento $U_3 \in \mathcal{F}$ tale che $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$. Dunque, per l'ultima parte di (ii), si ha ${}^\sharp U_3 \subseteq {}^\sharp(U_1 \cap U_2) = {}^\sharp U_1 \cap {}^\sharp U_2$. Per l'arbitrarietà di $U_1, U_2 \in \mathcal{F}$, segue immediatamente che a $\widehat{G}$ e ${}^\sharp\mathcal{F}$ possiamo applicare la Proposizione (3.6). Dunque esiste una e una sola topologia su $\widehat{G}$ per la quale gli insiemi ${}^\sharp\mathcal{F}_\eta$ costituiscono un sistema fondamentale di intorni di η, per ogni $\eta \in \widehat{G}$, e tale topologia rende $\widehat{G}$ un gruppo topologico. Verifichiamo che la topologia, diciamo $\mathscr{T}_\mathcal{F}$, che è stata determinata non dipende da $\mathcal{F}$. Sia $\mathcal{G}$ un arbitrario sistema fondamentale di intorni dello 0 di G costituito da sottogruppi. Allora, per quanto appena visto, viene univocamente determinata una topologia $\mathscr{T}_\mathcal{G}$ per la quale, per ogni $\eta \in \widehat{G}$, la collezione di insiemi ${}^\sharp\mathcal{G}_\eta = \{\eta + {}^\sharp V : V \in \mathcal{G}\}$ è un sistema fondamentale di intorni di 0 in $\widehat{G}$. Bisogna mostrare che $\mathscr{T}_\mathcal{F} = \mathscr{T}_\mathcal{G}$. Sia Ω un aperto di $\mathscr{T}_\mathcal{F}$ e sia $\eta \in \Omega$. Per costruzione, esiste un elemento $U \in \mathcal{F}$ tale che $\eta + {}^\sharp U \subseteq \Omega$. Inoltre, poiché U è un intorno dello 0 in G e $\mathcal{G}$ è un sistema fondamentale di intorni di 0 in G, esiste un elemento $V \in \mathcal{G}$ tale che $V \subseteq U$. Allora, per quanto visto in (ii), si ha $\eta + {}^\sharp V \subseteq \eta + {}^\sharp U \subseteq \Omega$. Così resta provato che Ω è aperto nella topologia $\mathscr{T}_\mathcal{G}$. L'inclusione inversa si ottiene immediatamente scambiando il ruolo di $\mathcal{F}$ con quello di $\mathcal{G}$. Resta da mostrare che $\widehat{G}$ è uno spazio di Hausdorff. In virtù della Proposizione (3.4(vi)), è sufficiente provare che $\bigcap {}^\sharp\mathcal{F} = \{0\}$. Fissiamo dunque un punto $\eta \in {}^\sharp U$, per ogni $U \in \mathcal{F}$, e sia $(x_\lambda)_\lambda$ una successione di Cauchy in G tale che $\eta = [(x_\lambda)_\Lambda]$. Per ogni intorno Ω dello 0 in G fissiamo un elemento $U' \in \mathcal{F}$ tale che $U' \subseteq \Omega$. Allora, poiché $\eta \in {}^\sharp U'$, esiste un elemento $\lambda_0 \in \Lambda$ tale che $x_\lambda \in U \subseteq \Omega$, per ogni $\lambda \geq \lambda_0$. Questo prova che $0 \in \lim_\Lambda (x_\lambda)$, ovvero, per definizione, $\eta = 0$. □

Proviamo adesso il risultato centrale della sezione, la completezza di $\widehat{G}$.

3.19 TEOREMA. *Perserviamo le notazioni e le ipotesi della Proposizione (3.18). Allora $\widehat{G}$ è un gruppo topologico completo.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo, per la Proposizione (3.18), $\widehat{G}$ un gruppo topologico di Hausdorff, basterà mostrare che ogni successione generalizzata di Cauchy in $\widehat{G}$ converge a un punto di $\widehat{G}$. Sia dunque $(\eta_\lambda)_\Lambda$ una successione di Cauchy in $\widehat{G}$. Per definizione, per ogni $\lambda \in \Lambda$ esistono un insieme filtrante $T(\lambda)$ e una successione generalizzata di Cauchy $(x_\tau(\lambda))_{T(\lambda)} \subseteq G$ tali che $\eta_\lambda = [(x_\tau(\lambda))_{T(\lambda)}]$. Sia $\mathcal{F}$ un sistema fondamentale di intorni dello 0 in G costituito da sottogruppi. Fissiamo $\lambda \in \Lambda$ e un elemento $V \in \mathcal{F}$. Siccome la successione $(x_\tau(\lambda))_{T(\lambda)}$ è di Cauchy, esiste un elemento $t_{\lambda,V} \in T(\lambda)$ tale che $x_{t_{\lambda,V}}(\lambda) - x_\tau(\lambda) \in V$, per ogni $\tau \geq t_{\lambda,V}$. Per l'Osservazione (3.8(4)), $\mathcal{F}$ è in modo naturale un insieme filtrante, e dunque è filtrante anche l'insieme $\Lambda \times \mathcal{F}$ (Osservazione (3.8(iii))). Posto, per ogni $\lambda \in \Lambda, V \in \mathcal{F}$, $z_{(\lambda,V)} := x_{t_{\lambda,V}}(\lambda)$, otteniamo una successione generalizzata $(z_{(\lambda,V)})_{\Lambda\times\mathcal{F}}$ a termini in G. Vogliamo mostrare che $(z_{(\lambda,V)})_{\Lambda\times\mathcal{F}}$ è di Cauchy. Fissiamo un intorno Ω dello 0 in G, e consideriamo un elemento $U \in \mathcal{F}$ tale che $U \subseteq \Omega$. Poiché la successione generalizzata $(\eta_\lambda)_\Lambda$ è di Cauchy in $\widehat{G}$ e ${}^\sharp U$ è un intorno aperto dello 0 (Proposizione (3.18)), esiste un elemento $\nu_0 \in \Lambda$ tale che $\eta_{\zeta_1} - \eta_{\zeta_2} \in {}^\sharp U$, per ogni $\zeta_1, \zeta_2 \geq \nu_0$. Fissiamo $\alpha, \beta \geq \nu_0$ e $V, W \in \mathcal{F}$ tali che $V, W \subseteq U$. Basterà dimostrare che $z_{(\alpha,V)} - z_{(\beta,W)} \in U$. Poiché risulta $\eta_\alpha - \eta_\beta \in {}^\sharp U$ (in quanto $\alpha, \beta \geq \nu_0$), esistono $\tau_0 \in T(\alpha), \sigma_0 \in T(\beta)$, tali che $x_\tau(\alpha) - x_\sigma(\beta) \in U$, per ogni $(\tau, \sigma) \geq (\tau_0, \sigma_0)$. Poiché $T(\alpha), T(\beta)$ sono insiemi filtranti, possiamo scegliere elementi $\tau^* \in T(\alpha), \sigma^* \in T(\beta)$ tali che $\tau^* \geq \tau_0, t_{\alpha,V}$ e $\sigma^* \geq \sigma_0, t_{\beta,W}$. Allora si ha $x_{t_{\alpha,V}}(\alpha) - x_{\tau^*}(\alpha) \in V \subseteq U$, $x_{\tau^*}(\alpha) - x_{\sigma^*}(\beta) \in U$ e $x_{\sigma^*}(\beta) - x_{t_{\beta,W}}(\beta) \in W \subseteq U$. Dunque, poiché U è un sottogruppo di G, si ottiene

$$z_{(\alpha,V)} - z_{(\beta,W)} = x_{t_{\alpha,V}}(\alpha) - x_{\tau^*}(\alpha) + x_{\tau^*}(\alpha) - x_{\sigma^*}(\beta) + x_{\sigma^*}(\beta) - x_{t_{\beta,W}}(\beta) \in U.$$

Resta così provato che la successione generalizzata $(z_{(\lambda,V)})_{\Lambda\times\mathcal{F}}$ è di Cauchy. Posto $\eta := [(z_{(\lambda,V)})_{\Lambda\times\mathcal{F}}] \in \widehat{G}$, vogliamo dimostrare che $\eta \in \lim_\Lambda(\eta_\lambda)$. Fissiamo un intorno di η. Per la Proposizione (3.18(iii)), non è restrittivo assumere che tale intorno sia della forma $\eta + {}^\sharp U$, per qualche $U \in \mathcal{F}$. Poiché $(\eta_\lambda)_\Lambda$ è di Cauchy, consideriamo, come prima, un elemento $\nu_0 \in \Lambda$ tale che

$\eta_{\zeta_1} - \eta_{\zeta_2} \in {}^\sharp U$, per ogni $\zeta_1, \zeta_2 \geq \nu_0$. Fissiamo un elemento $\lambda_0 \geq \nu_0$. Sarà sufficiente dimostrare che $\eta_{\lambda_0} - \eta = [(x_\tau(\lambda_0) - x_{t_{\lambda,U}}(\lambda))_{T(\lambda_0)\times(\Lambda\times\mathcal{F})}] \in {}^\sharp U$. Poiché $\lambda_0 \geq \nu_0$, si ha $\eta_{\lambda_0} - \eta_{\nu_0} \in {}^\sharp U$, e quindi esistono $\tau_0 \in T(\lambda_0), \sigma_0 \in T(\nu_0)$ tali che $x_\tau(\lambda_0) - x_\sigma(\nu_0) \in U$, per ogni $(\tau, \sigma) \geq (\tau_0, \sigma_0)$. Fissiamo $(\tau_1, \lambda_1, U') \in T(\lambda_1) \times \Lambda \times \mathcal{F}$ tali che $\tau_1 \geq \tau_0, \lambda_1 \geq \nu_0$ e $U' \subseteq U$. Sarà sufficiente mostrare che $x_{\tau_1}(\lambda_0) - x_{t_{\lambda_1,U'}}(\lambda_1) \in U$. Poiché $\lambda_1 \geq \nu$, esistono $\gamma_1 \in T(\lambda_1), \sigma_1 \in T(\nu_0)$ tali che $x_\gamma(\lambda_1) - x_\sigma(\nu_0) \in U$, per ogni $(\gamma, \sigma) \geq (\gamma_1, \sigma_1)$. Poiché $T(\nu_0), T(\lambda_1)$ sono insiemi filtranti, possiamo scegliere $\sigma' \in T(\nu_0)$ e $\gamma' \in T(\lambda_1)$ tali che $\sigma' \geq \sigma_0, \sigma_1$ e $\gamma' \geq \gamma_1, t_{\lambda_1,U'}$. Allora si ha $x_{\tau_1}(\lambda_0) - x_{\sigma'}(\nu_0) \in U$, $x_{\sigma'}(\nu_0) - x_{\gamma'}(\lambda_1) \in U$ e inoltre $x_{\gamma'}(\lambda_1) - x_{t_{\lambda_1,U'}}(\lambda_1) \in U' \subseteq U$. Infine, poiché U è un sottogruppo di G, si ha $x_{\tau_1}(\lambda_0) - x_{t_{\lambda_1,U'}}(\lambda_1) \in U$, che è quanto era necessario mostrare. □

Vedremo adesso quando è possibile immergere un gruppo topologico G nel suo completamento $\widehat{G}$.

3.20 Osservazione. Tenendo presente che, per ogni $x \in G$, la classe $\iota(x)$ della successione costante $(x)_\Lambda$ determina univocamente un punto in $\widehat{G}$ (Osservazione (3.16(i))), viene definita una funzione $\iota : G \longrightarrow \widehat{G}$.

Mostreremo a breve, fra l'altro, che ι permette, quando G è di Hausdorff, di immergere G in $\widehat{G}$. Proviamo intanto una semplice ma utile caratterizzazione della continuità di un omomorfismo di gruppi topologici.

3.21 Lemma. *Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi topologici. Allora f è continuo se e soltanto se è continuo in* 0.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continuo in 0, fissiamo un punto $x \in G$ e un intorno Ω di $f(x)$. Allora, per la Proposizione (3.4(ii)), esiste un intorno U di 0 in H tale che $f(x) + U \subseteq \Omega$. Per ipotesi, possiamo fissare un intorno V di 0 in G tale che $f(V) \subseteq U$. Dunque, essendo f un omomrfismo, si ha $f(x + V) \subseteq f(x) + U \subseteq \Omega$, e osservato che $x + V$ è un intorno di x, la conclusione segue immediatamente. □

3.22 Proposizione. *Sia G un gruppo topologico che ha un sistema fondamentale di intorni $\mathcal{F}$ dello* 0 *costuito da sottogruppi, e sia $\iota : G \longrightarrow \widehat{G}$ la funzione definita nell'Osservazione (3.20). Allora valgono le seguenti asserzioni.*

(i) *ι è un omomorfismo continuo di gruppi topologici e $\iota(G)$ è denso in $\widehat{G}$.*

(ii) *Si ha* $\mathrm{Ker}(\iota) = \bigcap \mathcal{F}$. *In particolare* ι *è iniettiva se e soltanto se* G *è di Hausdorff.*

(iii) *La funzione* ι *trasforma aperti di* G *in aperti di* $\iota(G)$. *In particolare, se* G *è di Hausdorff, allora* ι *è un'immersione topologica e, dunque,* G *è omeomorfo a un sottospazio denso di* $\widehat{G}$.

(iv) *Per ogni elemento* $[(x_\lambda)_\Lambda] \in \widehat{G}$, *risulta* $\iota^{-1}([(x_\lambda)_\Lambda]) = \lim_\Lambda (x_\lambda)$.

Dimostrazione. Ovviamente, ι è un omomorfismo di gruppi. Per mostrare che è continuo, sarà pertanto sufficiente verificare che è continuo in 0, stante il Lemma (3.21). Fissiamo un intorno di 0 in $\widehat{G}$. Non è restrittivo assumere che tale intorno sia della forma ${}^\sharp U$, per qualche $U \in \mathcal{F}$, in virtù della Proposizione (3.18(iii)). Dalle definizioni segue immediatamente che $U \subseteq \iota^{-1}({}^\sharp U)$, e quindi $\iota(U) \subseteq \iota(\iota^{-1}({}^\sharp U) \subseteq {}^\sharp U$, da cui segue la continuità di ι in 0. Per mostrare che $\iota(G)$è denso in $\widehat{G}$, fissiamo un aperto non vuoto Ω di $\widehat{G}$ e un punto $\eta \in \Omega$. Per la Proposizione (3.18(iii)), esiste un elemento $U \in \mathcal{F}$ tale che $\eta + {}^\sharp U \subseteq \Omega$. Detta $(x_\lambda)_\Lambda$ una successione generalizzata di Cauchy che rappresenta η, esiste un elemento $\nu_U \in \Lambda$ tale che $x_\lambda - x_{\nu_U} \in U$, per ogni $\lambda \geq \nu_U$, e quindi, posto $z_\lambda := x_\lambda - x_{\nu_U}$, per ogni $\lambda \in \Lambda$, si ha $[(z_\lambda)_\Lambda] \in {}^\sharp U$. A questo punto, per concludere basta osservare che $\iota(x_\nu) = \eta + [(z_\lambda)_\Lambda] \in \eta + {}^\sharp U \subseteq \Omega$. La (ii) è una facile conseguenza delle definizioni e della Proposizione (3.4(iv)). Proviamo la prima parte della (iii). Siano V un aperto di G e $\eta \in \iota(V)$. Fissato un punto $x \in V$ tale che $\iota(x) = \eta$, esiste un intorno $U \in \mathcal{F}$ tale che $x + U \subseteq V$. Poiché $\iota(U) = \iota(G) \cap {}^\sharp U$, si ha $\iota(x+U) = \iota(x) + (\eta + U) \cap \iota(G) \subseteq V$. Dunque $\iota(V)$ è aperto in $\iota(G)$. La seconda parte di (iii) segue subito dalla (i) e dalla (ii). La (iv) è una conseguenza immediata delle definizioni e dell'Osservazione (3.16(ii)). □

3.23 Corollario. *Sia* G *un gruppo topologico avente un sistema fondamentale di intorni costituito da sottogruppi. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(1) G *è completo.*

(2) *L'omomorfismo* $\iota : G \longrightarrow \widehat{G}$ *è simultaneamente un isomorfismo e un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla Proposizione (3.22). □

Occupiamoci adesso del problema di estendere un omomorfismo continuo di gruppi topologici ai completamenti. Ci serviremo di un importante risultato sulla struttura degli intorni dello 0 di un gruppo topologico. Cominciamo a mostrare il seguente lemma.

3.24 Lemma. *Siano G un gruppo topologico e C un sottoinsieme chiuso di G non contenente 0. Allora esistono un intorno aperto V di 0 e un aperto Ω contenente C tali che $\Omega \cap V = \emptyset$*

Dimostrazione. Per ipotesi, $G \backslash C$ è un intorno aperto dello 0. Dunque, in virtù della Proposizione (3.4(v)), esiste un intorno aperto V dello 0 tale che $V + (-V) \subseteq G \backslash C$. Inoltre, l'insieme $\Omega := \bigcap_{x \in C} (x + V)$ è un insieme aperto (Proposizione (3.4(i))) contenente C. Se v fosse un punto di $V \cap \Omega$, allora esisterebbero elementi $v' \in V, c \in C$ tale che $v = c + v'$, ovvero $c = v - v' \in V + (-V) \subseteq G \backslash C$, una contraddizione. Allora V e Ω sono disgiunti, che è quanto si voleva provare. □

3.25 Proposizione. *Ogni gruppo topologico ha un sistema fondamentale di intorni dello 0 costituito da insiemi chiusi.*

Dimostrazione. Siano G un gruppo topologico, $\mathcal{I}$ la collezione degli intorni aperti dello 0 in G e $U \in \mathcal{I}$. Pertanto l'insieme $C_U := G \backslash U$ è un chiuso non contenente 0. Per il Lemma (3.24), esistono un un intorno aperto V_U di 0 e un aperto Ω_U contenente C_U tali che $\Omega_U \cap V_U = \emptyset$, ed equivalentemente $V_U \subseteq G \backslash \Omega_U$. Da questa relazione segue subito che, per ogni $U \in \mathcal{I}$, $G \backslash \Omega_U$ è un intorno chiuso dello 0. Infine, dal fatto che $G \backslash \Omega_U \subseteq G \backslash C_U = U$, per ogni $U \in \mathcal{I}$, segue $\mathcal{G} := \{G \backslash \Omega_U : U \in \mathcal{I}\}$ è un sistema fondamentale di intorni di 0. Questo completa la dimostrazione. □

Dimostriamo una importante conseguenza della Proposizione (3.25). Ricordiamo il seguente fatto di Topologia Generale, la cui dimostrazione discende facilmente dalle definizioni.

3.26 Lemma. *Siano X uno spazio topologico, D un suo sottoinsieme denso, e U un insieme aperto. Allora $\mathrm{Ad}_X(U \cap D) = \mathrm{Ad}_X(U)$.*

3.27 Proposizione. *Siano G un gruppo topologico, H un suo sottogruppo denso e $\mathcal{F}$ un sistema fondamentale di intorni aperti dello 0 per il sottospazio H. Allora $\mathcal{F}^* := \{\mathrm{Ad}_G(U) : U \in \mathcal{F}\}$ è un sistema fondamentale di intorni* *dello* 0 *in* G.

DIMOSTRAZIONE. Sia $U \in \mathcal{F}$. Per costruzione, esiste un intorno aperto $V_U \subseteq G$ dello 0 tale che $U = H \cap V_U$. Allora, stante il Lemma (3.26), si ha $\mathrm{Ad}_G(U) = \mathrm{Ad}_G(V) \supseteq V_U$, e quindi $\mathrm{Ad}_G(U)$ è un intorno dello 0 in G. Fissiamo un arbitrario intorno V dello 0 in G. Per la Proposizione (3.25), esiste un intorno chiuso W dello 0 tale che $W \subseteq V$. Poiché $W \cap H$ è un intorno dello 0 in H, esiste un elemento $U^* \in \mathcal{F}$ tale che $U^* \subseteq W \cap H$, e quindi $\mathrm{Ad}_G(U^*) \subseteq \mathrm{Ad}_G(W \cap H) \subseteq W \subseteq V$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Ricordiamo la seguente proprietà delle funzioni continue su spazi di Hausdorff.

3.28 LEMMA. *Siano* X, Y *spazi topologici,* Y *di Hausdorff, e siano* $f, g : X \longrightarrow Y$ *funzioni continue. Se* D *è un sottoinsieme denso di* X *tale che* $f|_D = g|_D$, *allora* $f = g$.

3.29 PROPOSIZIONE. *Siano* G *un gruppo topologico avente un sistema fondamentale di intorni* $\mathcal{F}$ *dello* 0 *costituito da sottogruppi,* Γ *un gruppo topologico completo, e sia* $f : G \longrightarrow \Gamma$ *un omomorfismo continuo. Allora* f *induce un omomorfismo continuo* $\widehat{f} : \widehat{G} \longrightarrow \Gamma$ *tale che* $\widehat{f} \circ \iota = f$, *dove* $\iota : G \longrightarrow \widehat{G}$ *è la funzione definita nell'Osservazione (3.20).*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\eta = [(x_\lambda)_\Lambda]$ un elemento di $\widehat{G}$. Poiché f è un omomorfismo continuo, $(f(x_\lambda))_\Lambda \subseteq \Gamma$ è una successione di Cauchy (Osservazione (3.12). Poiché Γ è completo, l'insieme $\lim_\Lambda (f(x_\lambda))$ ha un unico elemento γ. Dalle Osservazioni (3.10(iv)) e (3.16(ii)), segue subito che γ dipende esclusivamente da η. Dunque resta definita un'applicazione $\widehat{f} : \widehat{G} \longrightarrow \Gamma$ tale che $\widehat{f}(\eta) = \gamma$, e si verifica immediatamente che $\widehat{f}$ è un omomorfismo di gruppi tale che $\widehat{f} \circ \iota = f$. Per verificare che $\widehat{f}$ è continuo, basterà verificare che è continuo in 0 (Lemma (3.21)). Sia dunque V un intorno dello 0 di Γ. Per la Proposizione (3.25), non è restrittivo assumere che V sia chiuso. Essendo f continuo, esiste un intorno $U \in \mathcal{F}$ di 0 tale che $f(U) \subseteq V$. Sarà sufficiente mostrare che $\widehat{f}(\sharp U) \subseteq V$. Fissiamo dunque un punto $\eta = [(x_\lambda)_\Lambda] \in \sharp U$. Per definizione, esiste un elemento $\lambda_0 \in \Lambda$ tale che $x_\lambda \in U$, per ogni $\lambda \geq \lambda_0$. Essendo, dunque, $\{f(x_\lambda) : \lambda \geq \lambda_0\} \subseteq V$, per l'Osservazione (3.10(v)) si ha $\widehat{f}([(x_\lambda)_\Lambda]) \in \mathrm{Ad}_\Gamma(V) = V$. L'unicità della funzione $\widehat{f}$ segue dal Lemma(3.28), tenendo presente che $\iota(G)$ è denso in $\widehat{G}$ e che la condizione $\widehat{f} \circ \iota = f$ equivale a $\widehat{f}|_{\iota(G)} = f$. $\square$

3.30 Osservazione. Preserviamo notazioni e ipotesi della Proposizione (3.29). Se G è di Hausdorff, possiamo considerare G un sottospazio denso di $\widehat{G}$, pur di identificare G con la sua immagine $\iota(G)$ in $\widehat{G}$ (Proposizione (3.22(iii))). Allora, in questo caso $\widehat{f}$ è precisamente l'estensione di f a $\widehat{G}$.

3.31 Corollario. *Siano* Γ *un gruppo topologico completo e* G *un sottogruppo di* Γ. *Allora* $\widehat{G}$ *è algebricamente e topologicamente immerso in* Γ.

Dimostrazione. In virtù della Proposizione (3.29), l'inclusione $i : G \hookrightarrow \Gamma$ induce un omomorfismo continuo $\widehat{i} : \widehat{G} \longrightarrow \Gamma$. Basterà mostrare che $\widehat{i}$ è un'immersione topologica. Siccome, per definizione, $\widehat{i}([(x_\lambda)_\Lambda]) = \lim\limits_{\Lambda}(x_\lambda)$, si ha immediatamente che $\widehat{i}$ è iniettiva. A questo punto, possiamo identificare $\widehat{G}$ con un sottogruppo di Γ. Per concludere, basterà mostrare che la topologia di $\widehat{G}$ coincide con la topologia di sottospazio determinata da quella di Γ. Poiché $\widehat{i}$ è continua, ogni aperto della forma $V \cap \widehat{G}$ è un aperto di $\widehat{G}$. Fissiamo pertanto un insieme aperto Ω di $\widehat{G}$, e sia $\omega \in \Omega$. Essendo G denso in $\widehat{G}$ (Osservazione (3.30)), esiste un intorno aperto U dello 0 in G tale che $\omega + \mathrm{Ad}_{\widehat{G}}(U) \subseteq \Omega$, in virtù della Proposizione (3.27). Essendo G un sottospazio di Γ, esiste un intorno aperto U' dello 0 in Γ tale che $U' \cap G = U$. Per quanto osservato prima, l'insieme $U' \cap \widehat{G}$ è aperto in Γ, e quindi, tenendo presente il Lemma (3.26), si ha $\mathrm{Ad}_{\widehat{G}}(U) = \mathrm{Ad}_{\widehat{G}}(U' \cap \widehat{G} \cap G) = \mathrm{Ad}_{\widehat{G}}(U' \cap \widehat{G})$. Dunque $\omega + U' \cap \widehat{G} \subseteq \omega + \mathrm{Ad}_{\widehat{G}}(U' \cap \widehat{G}) = \omega + \mathrm{Ad}_{\widehat{G}}(U) \subseteq \Omega$. Questo prova che Ω è intorno di ω rispetto alla topologia di sottospazio indotta da Γ. Dall'arbitrarietà di $\omega \in \Omega$ segue l'asserto. $\square$.

3.32 Proposizione. *Siano* G *un gruppo topologico e* H *un suo sottogruppo. Allora* $\mathrm{Ad}_G(H)$ *è un sottogruppo di* G.

Dimostrazione. Basterà dimostrare che, se $x, y \in \mathrm{Ad}_G(H)$, si ha $x - y \in \mathrm{Ad}_G(H)$. Fissiamo un intorno dello U dello 0. Per la Proposizione (3.4(v)), esiste un intorno V dello 0 tale che $V + (-V) \subseteq U$. Poiché $x, y \in \mathrm{Ad}_G(H)$, esistono $h_1, h_2 \in H, v_1, v_2 \in V$ tali che $h_i = x + v_i$ $(i = 1, 2)$, e quindi $x - y + v_1 - v_2 \in (x - y + V + (-V)) \cap H \subseteq (x - y + U) \cap H$. Dall'arbitrarietà di U, segue $x - y \in \mathrm{Ad}_G(H)$. $\square$

3.33 PROPOSIZIONE. *Siano G un gruppo topologico e H un sottogruppo completo di G. Allora H è chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $x \in \mathrm{Ad}_G(H)$ e $\mathcal{I}$ la collezione degli intorni aperti dello 0. Allora possiamo scegliere, per ogni $U \in \mathcal{I}$, un elemento $h_U \in (x + U) \cap H$. In altri termini, per ogni $U \in \mathcal{I}$, si ha $h_U = x + x_U$, per qualche $x_U \in U$. Otteniamo così una successione generalizzata $(h_U)_{\mathcal{I}}$ in H, essendo $\mathcal{I}$ un insieme filtrante. Fissiamo adesso un intorno $U \in F$. Per la Proposizione (3.4(v)), esiste un intorno V dello 0 tale che $V + (-V) \subseteq U$. Allora, per ogni $U_1, U_2 \subseteq V$, si ha $h_{U_1} - h_{U_2} = x_{U_1} - x_{U_2} \in V + (-V) \subseteq U$. Questo prova che la successione generalizzata $(h_U)_{\mathcal{I}} \subseteq H$ è di Cauchy. Dunque esiste un unico elemento $h \in \lim_{\mathcal{I}}(h_U)$, e inoltre $h \in H$. D'altra parte, è immediatamente visto che $x \in \lim_{\mathcal{I}}(h_U)$. Dunque $x = h$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

3.34 COROLLARIO. *Siano G un gruppo topologico completo e H un suo sottogruppo. Allora $\widehat{H} = \mathrm{Ad}_G(H)$.*

DIMOSTRAZIONE. In virtù dell'Osservazione (3.14), $\mathrm{Ad}_G(H)$ è un sottogruppo completo di G (contenente H). Dunque, per il Corollario (3.31), $\mathrm{Ad}_G(H)$ contiene $\widehat{H}$ come sottogruppo e come sottospazio. Allora la conclusione segue immediatamente dal fatto che $\widehat{H}$ è chiuso, per la Proposizione (3.33). $\square$

3.35 COROLLARIO. *Siano G un gruppo topologico completo e H un suo sottogruppo denso. Allora $\widehat{H} = G$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il Corollario (3.34). $\square$

4 La topologia indotta da una valutazione

In analogia con la teoria classica dei valori assoluti, costruiremo adesso su un campo K una topologia associata a una valutazione di K. Cominciamo con delle osservazioni sui gruppi abeliano totalmente ordinati.

4.1 OSSERVAZIONE. Sia Γ un gruppo abeliano totalmente ordinato non nullo. Allora, per ogni $\alpha \in \Gamma$, esiste un elemento $\alpha' \in \Gamma$ tale che $\alpha' > \alpha$. Infatti, se $\alpha < 0$, basta porre $\alpha' = -\alpha$. Se $\alpha = 0$, basta prendere un elemento $\alpha' > 0$ (che esiste per ipotesi). Se $\alpha > 0$, basta prendere $\alpha' = 2\alpha$.

4.2 Proposizione. *Siano K un campo e $v : K \longrightarrow \Gamma_\infty$ (dove $\Gamma_\infty := \Gamma \cup \{\infty\}$) una valutazione di K. Per ogni $\alpha \in \Gamma$, consideriamo il sottogruppo additivo $V_\alpha = \{x \in K : v(x) > \alpha\}$ di K, e per ogni $x \in K$, sia $\mathcal{F}_x = \{x + V_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$. Allora:*

(i) *esiste una e una sola topologia $\mathscr{T}_v$ su K per la quale la famiglia $\mathcal{F}_x$ sia un sistema fondamentale di intorni aperti di x, per ogni $x \in K$. Tale topologia rende K un gruppo topologico additivo.*

(ii) *la topologia $\mathscr{T}_v$ rende K uno spazio di Hausdorff. In particolare K si identifica con un sottospazio denso di $\widehat{K}$.*

(iii) *se muniamo Γ della topologia discreta, allora la funzione $v : K^* \longrightarrow \Gamma$ è continua.*

Dimostrazione. Poiché, per ogni $\alpha, \beta \in \Gamma$, si ha $V_\alpha \cap V_\beta = V_{\min\{\alpha,\beta\}}$, la (i) è una conseguenza immediata della Proposizione (3.6) (applicata alla famiglia $\mathcal{F} := \{V_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$). Per provare la (ii), basta verificare che $\bigcap \mathcal{F} = \{0\}$, per la Proposizione (3.4(iv)). Questo segue facilmente dall'Osservazione (4.1), se v è non banale. Altrimenti, l'unico elemento di $\mathcal{F}$ è $V_0 = \{0\}$. Per provare (iii), basta verificare che le fibre di v sono aperte. Siano dunque $\gamma \in \Gamma$ e $x \in v^{-1}(\gamma)$. Per [1, Proposizione (3.12(d))], si ha immediatamente $x + V_\gamma \subseteq v^{-1}(\gamma)$. Questo prova che $v^{-1}(\gamma)$ è intorno di ogni suo punto, e quindi è aperto. $\square$

4.3 Osservazione. Preserviamo le notazione della Proposizione (4.2). Se $(x_\lambda)_\Lambda$, $(y_\delta)_\Delta$ sono successioni generalizzate di Cauchy in K, allora $(x_\lambda y_\delta)_{\Lambda\times\Delta}$ è di Cauchy. Fissiamo $\gamma \in \Gamma$. Possiamo assumere $\gamma \geq 0$. Allora esistono $\lambda_\gamma \in \Lambda, \delta_\gamma \in \Delta$ tali che $\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_\gamma\} \subseteq V_\gamma$ e $\{y_\delta : \delta \geq \delta_\gamma\}$. Allora $\{x_\lambda y_\delta : (\lambda, \delta) \geq (\lambda_\gamma, \delta_\gamma)\} \subseteq V_{2\gamma} \subseteq V_\gamma$.

4.4 Osservazione. Preserviamo le notazioni della Proposizione (4.2). Allora, date due successioni generalizzate di Cauchy $(x_\lambda)_\Lambda$, $(y_\delta)_\Delta$, possiamo considerare il punto $[(x_\lambda y_\delta)_{\Lambda\times\Delta}] \in \widehat{K}$ (Osservazione (4.3)). Allora si vede facilmente che, definendo nel gruppo topologico additivo $\widehat{K}$ la seguente operazione
$$[(x_\lambda)_\Lambda)] \cdot [(y_\delta)_\Delta] := [(x_\lambda y_\delta)_{\Lambda\times\Delta}],$$
si rende $\widehat{K}$ un anello. L'unità è data dalla classe della successione costante (1).

4.5 Proposizione. *Preserviamo le notazioni della Proposizione (4.2). Allora $\widehat{K}$ è un campo.*

Dimostrazione. Sia $\eta = [(x_\lambda)_\Lambda]$ un elemento non nullo di $\widehat{K}$. Per definizione, la successione generalizzata $(x_\lambda)_\Lambda$ non converge a 0. Dunque, tenendo presente la Proposizione (4.2(i)), esiste un elemento $\alpha \in \Gamma$ tale che, per ogni $\lambda \in \Lambda$, esiste $\lambda' \geq \lambda$ tale che $x_{\lambda'} \notin V_\alpha$ (e, in particolare, $x_{\lambda'} \neq 0$). Considerato il sottoinsieme $\Lambda' := \{\lambda' : \lambda \in \Lambda\}$ di Λ, si vede subito che la restrizione dell'ordine di Λ rende Λ' un insieme filtrante. Dunque, posto, per ogni $\tau \in \Lambda'$, $z_\tau = 1/x_\tau$, si ottiene una successione generalizzata $(z_\tau)_{\Lambda'}$, che è di Cauchy. Per provare questo, fissiamo $\gamma \in \Gamma$. Allora, esiste un elemento $\nu \in \Lambda$ tale che $x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in V_{2\alpha+\gamma}$, per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \geq \nu$. Fissiamo ad arbitrio elementi $\lambda'_1, \lambda'_2 \in \Lambda'$ tali che $\lambda'_1, \lambda'_2 \geq \nu'(\geq \nu)$. Allora si ha immediatamente $v(z_{\lambda'_1} - z_{\lambda'_2}) = v\left(\dfrac{x_{\lambda'_2} - x_{\lambda'_1}}{x_{\lambda'_1} x_{\lambda'_2}}\right) > \gamma$. Inoltre la successione generalizzata estratta $(x_\tau)_{\Lambda'}$ è di Cauchy, ed è equivalente alla successione generalizzata $(x_\lambda)_\Lambda$ (Osservazione (3.12(v))). Segue allora immediatamente che l'inverso di η è $[(z_\tau)_{\Lambda'}]$. □

Diamo un risultato che permette di determinare il segno di particolari funzioni a valori in un gruppo abeliano totalmente ordinato discreto.

4.6 Lemma. *Siano X uno spazio topologico, Γ un gruppo abeliano totalmente ordinato discreto e $f : X \longrightarrow \Gamma$ una funzione continua. Se D è un sottoinsieme denso di X e $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$, allora $f(x) \geq 0$, per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che si abbia $f(x) = \gamma < 0$, per qualche $x \in X$. Allora $f^{-1}(\gamma)$ è un aperto non vuoto di X, per ipotesi, e quindi esiste un punto $y \in D \cap f^{-1}(\gamma)$, una contraddizione. □

Possiamo mostrare adesso il principale risultato della sezione.

4.7 Teorema. *Preserviamo le notazioni della Proposizione (4.2). Allora valgono le seguenti asserzioni.*

(i) *L'omomorfismo di gruppi $v : K^* \longrightarrow \Gamma$ si estende univocamente a un omomorfismo di gruppi $\widehat{v} : \widehat{K}^* \longrightarrow \Gamma$. Inoltre $\widehat{v}$ è una valutazione di $\widehat{K}$.*

(ii) *Per ogni* $\alpha \in \Gamma$, *si ha* $\mathrm{Ad}_{\widehat{K}}(V_\alpha) = \{x \in \widehat{K} : \widehat{v}(x) > \alpha\}$ *e inoltre* $\mathrm{Ad}_{\widehat{K}}(\{x \in K : v(x) \geq \alpha\}) = \{x \in \widehat{K} : \widehat{v}(x) \geq \alpha\}$.

(iii) *La topologia del completamento* $\widehat{K}$ *coincide con la topologia* $\mathscr{T}_{\widehat{v}}$ *associata alla valutazione* $\widehat{v}$.

(iv) *Siano* A, B *gli anelli di valutazione associati a* $v, \widehat{v}$, *rispettivamente. Allora il completamento* $\widehat{A}$ *di* A *(come sottogruppo topologico additivo di* K*) coincide con* B. *Dunque* $\widehat{A}$ *è un anello di valutazione.*

(v) *Sia* $\mathfrak{m}$ *l'ideale massimale di* A. *Allora il completamento* $\widehat{\mathfrak{m}}$ *di* $\mathfrak{m}$ *coincide con l'ideale massimale di* $\widehat{A}$, *ovvero* $\widehat{\mathfrak{m}} = \{x \in \widehat{K} : \widehat{v}(x) > 0\}$, *e si ha* $\widehat{A} = A + \widehat{\mathfrak{m}}$.

(vi) *I campi residui di* A *e* $\widehat{A}$ *sono canonicamente isomorfi.*

Dimostrazione. La prima parte di (i) è una conseguenza immediata della Proposizione (3.29), tenendo presente che Γ è completo con la topologia discreta. Per provare che $\widehat{v}$ è una valutazione, consideriamo il sottoinsieme $X := \{(x, y) \in \widehat{K}^* \times \widehat{K}^* : x + y \neq 0\}$ di $\widehat{K} \times \widehat{K}$, e sia $f : X \longrightarrow \Gamma$ la funzione definita ponendo $f((x, y)) = \widehat{v}(x + y) - \min\{\widehat{v}(x), \widehat{v}(y)\}$. Non è difficile mostrare che f è continua (considerando X un sottospazio del prodotto $\widehat{K} \times \widehat{K}$). Inoltre, poiché $\widehat{v}$ estende la valutazione v, si ha $f((x, y)) \geq 0$, per ogni $(x, y) \in G \times G \cap X$. Dunque, essendo $K \times K \cap X$ denso in X si ha $f((x, y)) \geq 0$, per ogni $(x, y) \in X$, stante il Lemma (4.6). Questo mostra che $\widehat{v}$ è una valutazione di K.
Fissiamo adesso $\alpha \in \Gamma$, un punto $\eta \in \mathrm{Ad}_{\widehat{K}}(V_\alpha)$, e sia $(x_\lambda)_\Lambda$ una successione generalizzata di Cauchy che rappresenta η. Poiché $\eta + {}^\sharp V_\alpha$ è un intorno aperto di η (Proposizione (3.18(iii))), fissiamo un punto $y \in (\eta + {}^\sharp V_\alpha) \cap V_\alpha$. Equivalentemente, esiste un elemento $\lambda_0 \in \Lambda$ tale che $\{y - x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\} \subseteq V_\alpha$, e quindi $x_\lambda \in V_\alpha$, per ogni $\lambda \geq \lambda_0$ (essendo $y \in V_\alpha$). D'altra parte, la successione generalizzata $(v(x_\lambda))_\Lambda$ è definitivamente costante perché è di Cauchy (Osservazione (3.12(vi))), e dunque $\widehat{v}(\eta) = \lim_\Lambda(v(x_\lambda)) > \alpha$. Viceversa, sia η un punto di $\widehat{K}$ tale che $\widehat{v}(\eta) > \alpha$. Se $(x_\lambda)_\Lambda$ rappresenta η, esiste un elemento $\lambda' \in \Lambda$ tale che $\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda'\} \subseteq V_\alpha$, essendo $\widehat{v}(\eta) = \lim_\Lambda(v(x_\lambda))$. Fissiamo $\gamma \in \Gamma$. Poiché $(x_\lambda)_\Lambda$ è di Cauchy, esiste un elemento $\nu \in \Lambda$ tale che $x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2}$, per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \geq \nu$. Scelto un elemeto $\lambda^* \in \Lambda$ tale che $\lambda^* \geq \nu, \lambda'$, si ha immediatamente $x_{\lambda^*} - \eta \in {}^\sharp V_\alpha$, ovvero $x_{\lambda^*} \in (\eta + {}^\sharp V_\alpha) \cap V_\alpha$.

La seconda uguaglianza della (ii) si prova con un argomento analogo. La (iii) è una conseguenza immediata della (ii) e delle Proposizioni (3.27), (4.2(i)). Per ottenere la (iv), basta osservare che si ha $\widehat{A} = \mathrm{Ad}_{\widehat{K}}(A) = \{x \in \widehat{K} : \widehat{v}(x) \geq 0\} = B$, tenendo presente la (ii) e il Corollario (3.34). In modo analogo si ha $\widehat{\mathfrak{m}} = \mathrm{Ad}_{\widehat{K}}(\mathfrak{m}) = \{x \in \widehat{K} : \widehat{v}(x) > 0\}$. Questo prova la prima parte della (v). L'inclusione $A + \widehat{\mathfrak{m}}$ è ovvia. Viceversa, fissiamo un punto $x \in \widehat{A}$. Poichè A è denso in $\widehat{A}$ (Proposizione (3.22(iii))) e $x + \{z \in \widehat{K} : \widehat{v}(z) > 0\}$ è un aperto non vuoto di $\widehat{A}$ (in virtù della (iii)), esiste un elemento $z \in \widehat{K}$ tale che $\widehat{v}(z) > 0$ e $x + z \in A$. Quindi si ha $\widehat{v}(x - a) > 0$, per un opportuno $a \in A$, ovvero $x \in A + \widehat{\mathfrak{m}}$. La (v) è quindi provata. Osserviamo adesso che l'omomorfismo canonico $\phi : A \longrightarrow (A + \widehat{\mathfrak{m}})/\widehat{\mathfrak{m}}$, $a \mapsto a + \widehat{\mathfrak{m}}$, è surgettivo e che $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathfrak{m}$. La (vi) è adesso una conseguenza immediata della (v). □

5 Il Teorema di Approssimazione

Siano K un campo e $\{v_i : i = 1, \ldots, n\}$ una collezione finita di valutazioni di K. Se A_i è l'anello di valutazione associato a v_i, per ogni i, sia $B = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Vogliamo indagare sulla relazione fra gli anelli A_i e l'anello B. Vedremo che tutti gli A_i sono localizzazioni di B.

5.1 LEMMA. *Siano K un campo e $\{v_i : i = 1, \ldots, n\}$ una collezione finita di valutazioni di K. Se A_i è l'anello di valutazione associato a v_i, per ogni i, sia $B = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Per ogni i, sia $\mathfrak{m}_i$ il massimale dell'anello di valutazione A_i, e x un elemento non nullo di K. Allora esistono interi $n_1, \ldots, n_{k-1}$, con $k \geq 2$, ed esiste un polinomio*

$$f(X) = 1 + n_1 X + \ldots, n_{k-1} X^{k-1} + X^k \qquad (*)$$

tale che $f(x) \neq 0$. Inoltre, detto z l'inverso di $f(x)$, si ha $v_i(z) = 0$, se $v_i(x) \geq 0$, mentre $v_i(z) + v_i(x) > 0$, altrimenti.

DIMOSTRAZIONE. Sia I l'insieme degli indici i tali che $v_i(x) \geq 0$. Per ogni $i \in I$, costruiamo un polinomio f_i come segue: detta $\overline{x}_i$ l'immagine di x nel campo residuo κ_i di A_i, se esiste un polinomio g della forma $(*)$ tale che $g(\overline{x}_i) = 0$ in κ_i, allora poniamo $f_i = g$; altrimenti sia $f_i = 1$. Proviamo che il polinomio di cui si deve provare l'esistenza è $f(X) = 1 + X^2 \prod_{i \in I} f_i(X)$ (che è della forma $(*)$). Supponiamo che sia $v_i(x) \geq 0$ (ovvero $i \in I$). Allora, se $g(\overline{x}_i) = 0$ in κ_i, per qualche g della forma $(*)$, si ha $f(\overline{x}_i) = 1$. Se un siffatto polinomio g non esiste, deve aversi $f(\overline{x}_i) \neq 0$, a fortiori. In definitiva si ha $f(x) \notin \mathfrak{m}_i$, ovvero $v_i(f(x)) = 0$ e quindi $v_i(z) = 0$. Se $v_i(x) < 0$, allora, per la Proposizione (3.12(d)) di [1], si ha $v_i(f(x)) = v_i(1 + n_1 x + \ldots + x^k) = kv_i(x)$. Dunque $v_i(x) + v_i(z) = (1-k)v_i(x) > 0$, poiché $k \geq 2$. □

5.2 PROPOSIZIONE. *Siano K un campo e $\{v_i : i = 1, \ldots, n\}$ una collezione finita di valutazioni di K. Se A_i è l'anello di valutazione associato a v_i, per ogni i, sia $B = \bigcap_{i=1}^n A_i$. Siano, per ogni $i = 1, \ldots, n$, $\mathfrak{m}_i$ i massimali di A_i, e sia $\mathfrak{p}_i = B \cap \mathfrak{m}_i$. Allora $B_{\mathfrak{p}_i} = A_i$, per ogni i.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo i. Ogni elemento dell'insieme $B \backslash \mathfrak{p}_i$ è invertibile in A_i, ovviamente. Pertanto, per la proprietà universale degli anelli di frazioni, l'inclusione di B in A_i si estende a un'immersione di anelli $B_{\mathfrak{p}_i} \hookrightarrow A_i$. Dunque l'inclusione $B_{\mathfrak{p}_i} \subseteq A_i$ è provata. Viceversa, fissiamo un elemento non nullo di A_i, prendiamo un polinomio f come nel Lemma (5.1), e sia z l'inverso di $f(x)$. Poiché $x \in A_i$, si ha $v_i(x) \geq 0$ e quindi $v_i(z) = 0$ (Lemma (5.1)); dunque $z \notin \mathfrak{m}_i$. Inoltre $v_i(xz) = v_i(x) \geq 0$, ovvero $xz \in A_i$. Per gli indici j tali che $v_j(x) \geq 0$, si ha analogamente $z, xz \in A_j$. Se invece risulta $v_j(x) < 0$, si ha $v_j(z) > v_j(z) + v_j(x) > 0$ (ancora per il Lemma (5.1)), e quindi $z, xz \in A_j$. In definitiva si ottiene $z, xz \in B$, e inoltre $z \notin \mathfrak{p}_i = B \cap \mathfrak{m}_i$. Dunque $x = \dfrac{xz}{z} \in B_{\mathfrak{p}_i}$. □

5.3 COROLLARIO. *Siano K un campo e $\{v_i : i = 1, \ldots, n\}$ una collezione finita di valutazioni di K. Se A_i è l'anello di valutazione associato a v_i, per ogni i, sia $B = \bigcap_{i=1}^n A_i$. Allora il campo dei quozienti di B è K.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ come nella Proposizione (5.2). Ovviamente il campo dei quozienti F di B è contenuto in K. D'altra parte l'inclusione di B in F di estende a un'immersione di $A_1 = B_{\mathfrak{p}_1}$ in F, per la Proposizione (5.2). L'asserto segue immediatamente. □

5.4 PROPOSIZIONE. *Siano B un dominio e K il suo campo dei quozienti. Se $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ sono ideali primi di B incomparabili e inoltre $B = \bigcap_{i=1}^n B_{\mathfrak{p}_i}$ (in K), allora* $\mathrm{Max}(B) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la parte moltiplicativa $S = B \backslash \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$, e proviamo l'uguaglianza $B = S^{-1}B$. Poiché B è un dominio, l'inclusione di B in $S^{-1}B$ è evidente. Viceversa, un elemento di $S^{-1}B$ è della forma b/s, con $b \in B, s \in S$. Questo basta per concludere la dimostrazione dell'uguaglianza. Mostriamo adesso che $\mathfrak{p}_i$ è un ideale massimale di B, per ogni i. Se così non fosse, fissiamo un ideale proprio $\mathfrak{a}$ di B tale che $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{a}$. Usando l'uguaglianza appena provata e tenendo presente la struttura degli ideali in anelli di frazioni, segue che $\mathfrak{a}$ non incontra S, e quindi $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$. Allora, per [2, Proposition (1.11)], deve aversi $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$, per qualche j, e $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_j$, una contraddizione. Fissiamo adesso un ideale massimale $\mathfrak{m}$ di B. Ancora per la precedente uguaglianza, $\mathfrak{m}$ è contenuto in $\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$, e quindi $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_i$, per qualche i. □

5.5 Corollario. *Siano K un campo, $A_1, \ldots, A_n$ anelli di valutazione di K incomparabili, $B = \bigcap_{i=1}^n A_i$. Detto, per ogni i, $\mathfrak{m}_i$ il massimale di A_i, e posto $\mathfrak{p}_i = B \cap \mathfrak{m}_i$, risulta* $\mathrm{Max}(B) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$.

Dimostrazione. Per la Proposizione (5.2), si ha $A_i = B_{\mathfrak{p}_i}$, per ogni i. Se risultasse $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}_j$, per qualche $i \neq j$, si avrebbe dunque $A_j \subseteq A_i$, contro l'ipotesi di incomparabilità. A questo punto, l'asserto è una conseguenza immediata della Proposizione (5.4). □

5.6 Proposizione. *Siano A un anello di valutazionee a $\mathfrak{a}$ un ideale proprio di A. Allora il radicale* $\mathrm{rad}(\mathfrak{a})$ *di $\mathfrak{a}$ è un ideale primo.*

Dimostrazione. $\mathrm{rad}(\mathfrak{a})$ è un ideale proprio di A, poiché tale è $\mathfrak{a}$. Inoltre la famiglia $\mathcal{F}$ degli ideali primi minimali di $\mathfrak{a}$ è costituita da un solo elemento, poiché l'inclusione stabilisce un'ordine totale nell'insieme degli ideali di A. Dunque basta osservare che $\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = \bigcap \mathcal{F}$. □

5.7 Definizione. *Siano K un campo e A, A' anelli di valutazione di K. Gli anelli A, A' si dicono* indipendenti *se l'anello che essi generano è K. Due valutazioni v, v' di K si dicono* indipendenti *se gli anelli di valutazione che esse determinano sono indipendenti.*

Adesso passiamo alla dimostrazione del principale risultato della sezione. Il primo passo è il seguente teorema.

5.8 Teorema (di approssimazione, forma debole). *Siano K un campo, $\{v_i : i = 1, \ldots, n\}$ una collezione finita di valutazioni di K tali che v_i e v_j sono indipendenti, per ogni i, j, Γ_i il gruppo dei valori di ciascuna valutazione v_i, e A_i l'anello di valutazione associato a v_i. Posto $B = \bigcap_{i=1}^n A_i$, fissiamo elementi $b_i \in B$ e $\alpha_i \in \Gamma_i$, per ogni i. Allora esiste un elemento $b \in B$ tale che $v_i(b - b_i) \geq \alpha_i$, per ogni $i = 1, \ldots, n$.*

Dimostrazione. Se qualcuna delle valutazioni v_i fosse banale ($\Gamma_i = \{0\}$), la disuguaglianza $v_i(b - b_i) \geq 0$ sarebbe soddisfatta per ogni $b \in B$. Possiamo quindi assumere che tutte le valutazioni siano non banali. Inoltre, non è restrittivo supporre che gli elementi α_i siano tutti positivi. Consideriamo, per ogni $i = 1, \ldots, n$, l'ideale di A_i

$$\mathfrak{o}_i = \{z \in A_i : v_i(z) \geq \alpha_i\},$$

e poniamo $\mathfrak{b}_i = B \cap \mathfrak{o}_i$. Poiché, se $b \in B$, si ha $v_i(b - b_i) \geq \alpha_i$ se e soltanto se $b - b_i \in \mathfrak{b}_i$, per provare l'asserto basterà dimostrare che l'omomorfismo di anelli $B \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} B/\mathfrak{b}_i$, $b \mapsto (b + \mathfrak{b}_q, \ldots, b + \mathfrak{b}_n)$, è surgettivo. In virtù di [2, Proposition (1,10)], basterà verificare che $\mathfrak{b}_i + \mathfrak{b}_j = B$, per ogni $i \neq j$. Poiché abbiamo assunto che le valutazioni sono tutte non banali e a due a due indipendenti, si ha $A_i \nsubseteq A_j$, per ogni $i \neq j$, e quindi gli ideali massimali di B sono $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$, in virtù del Corollario (5.5). Dunque l'asserzione $\mathfrak{b}_i + \mathfrak{b}_j = B$, per $i \neq j$, seguirà immediatamente se proviamo che $\mathfrak{b}_i \nsubseteq \mathfrak{p}_j$, per ogni $i \neq j$. Supponiamo, per assurdo, che esistano indici $i \neq j$ tali che $\mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{p}_j$, e sia $\mathfrak{p}$ il radicale di $\mathfrak{b}_i$. Verifichiamo che $\mathfrak{p}$ è un ideale primo: poiché $\mathfrak{o}_i$ è un ideale proprio di A_i (essendo $\alpha_i > 0$), $\mathrm{rad}(\mathfrak{o}_i)$ è un ideale primo di A_i, per la Proposizione (5.6). Dunque la primalità di $\mathfrak{p}$ segue dal fatto che $\mathfrak{p} = \mathrm{rad}(\mathfrak{o}_i) \cap B$. Essendo $\mathfrak{o}_i$ contenuto nel massimale $\mathfrak{m}_i$ di A_i, si ha $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{o}_i \cap B \subseteq \mathfrak{m}_i \cap B = \mathfrak{p}_i$, e quindi $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_i$. Inoltre, poiché abbiamo assunto $\mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{p}_j$, si ha $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_j$. Dunque gli anelli $A_i = B_{\mathfrak{p}_i}, A_j = B_{\mathfrak{p}_j}$ (Proposizione (5.2)) sono entrambi contenuti in $B_{\mathfrak{p}}$. Inoltre, poiché $\mathfrak{b}_i$ è la contrazione in B di $\mathfrak{o}_i$, dalla dimostrazione di [2, Proposition (1.11(1))], segue che $\mathfrak{o}_i = A_i\mathfrak{b}_i = B_{\mathfrak{p}_i}\mathfrak{b}_i$. Poiché $\mathfrak{o}_i$ è un ideale non nullo di A_i (le valutazioni sono applicazioni surgettive per definizione e quindi $v_i^{-1}(\alpha_i) \neq \emptyset$), si ha $\mathfrak{b}_i \neq \{0\}$, per la precedente uguaglianza, e quindi $\mathfrak{p} = \mathrm{rad}(\mathfrak{b}_i) \neq \{0\}$. Dunque $B_{\mathfrak{p}}$ è un sottoanello proprio di K che contiene simultaneamente A_i e A_j, contro l'indipendenza di v_i e v_j. □

5.9 Teorema (di approssimazione, forma forte). *Siano K un campo e $\{v_i : i = 1, \ldots, n\}$ una collezione finita di valutazioni di K a due a due indipendenti. Detto, per ogni i, Γ_i il gruppo dei valori di v_i, fissiamo $\alpha_i \in \Gamma_i$ e $a_1, \ldots, a_n \in K$. Allora esiste un elemento $x \in K$ tale che $v_i(x - a_i) \geq \alpha_i$, per ogni $i = 1, \ldots, n$.*

Dimostrazione. Sia B come nel Teorema (5.8). Per il Corollario (5.3), il campo dei quozienti di B è K, e quindi possiamo scegliere elementi $b_1, \ldots, b_n \in$

B, $s \in B \backslash \{0\}$, tali che $a_i = \dfrac{b_i}{s}$ (dopo aver ridotto le frazioni allo stesso denominatore). Consideriamo gli elementi $\alpha'_i = \alpha_i + v_i(s) \in \Gamma_i$. In virtù del Teorema (5.8), applicato a $b_1, \ldots, b_n$ e a $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$, possiamo scegliere un elemento $b \in B$ tale che $v_i(b - b_i) \geq \alpha'_i$, per ogni $i = 1, \ldots, n$. Proviamo che l'elemento di cui si deve mostrare l'esistenza è $x = \dfrac{b}{s}$. Si ha

$$v_i(x - a_i) = v_i(b - b_i) - v_i(s) \geq \alpha_i,$$

per ogni i. Questo completa la dimostrazione. $\square$

Una prima importante conseguenza del Teorema di approssimazione è data dal seguente risultato.

5.10 Corollario. *Siano K un campo e $\{v_i : i = 1, \ldots, n\}$ una collezione finita di valutazioni non banali di K, tali che v_i e v_j sono indipendenti, per ogni i, j. Consideriamo n copie di K, ciascuna delle quali abbia la topologia $\mathscr{T}_{v_i}$, con le notazioni della Proposizione (4.2). Se K^n è munito della topologia prodotto, allora la diagonale $\Delta_n = \{(x, \ldots, x) : x \in K\}$ è densa in K^n.*

Dimostrazione. Per ogni i, sia Γ_i il gruppo dei valori di v_i. Fissato ad arbitrio un aperto non vuoto U di K^n, basterà dimostrare che U interseca Δ_n. Scelto un elemento $(x_1, \ldots, x_n) \in U$, possiamo fissare, per ogni i, elementi $\alpha_i \in \Gamma_i$ tali che $\prod_{i=1}^n (x_i + V_{\alpha_i}) \subseteq U$. Poiché tutte le valutazioni sono non banali, possiamo scegliere, per ogni i, elementi $\beta_i \in \Gamma_i$ tali che $\beta_i > \alpha_i$ (infatti se $\alpha_i = 0$ prendiamo un $\beta_i > 0$, altrimenti basta porre $\beta_i = 2\alpha_i$). Applicando il Teorema di approssimazione (5.9) a $x_1, \ldots, x_n \in K$ e agli elementi $\beta_i \in \Gamma_i$, segue l'esistenza di un $x \in K$ tale che $v_i(x - x_i) \geq \beta_i > \alpha_i$. Dunque $x \in x_i + V_{\alpha_i}$, per ogni $i = 1, \ldots, n$, e quindi $(x, \ldots, x) \in \prod_{i=1}^n (x + V_{\alpha_i}) \subseteq U$. Questo basta per concludere la dimostrazione. $\square$

Una importante conseguenza di quanto appena visto è la possibilità di caratterizzare quando due valutazioni non banali di un campo K determinano la stessa topologia su K.

5.11 Proposizione. *Siano K un campo e v, w valutazioni non banali di K. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(1) *v, w inducono la stessa topologia su K (ovvero $\mathscr{T}_v = \mathscr{T}_w$).*

(2) *v, w sono dipendenti.*

Dimostrazione. (1) implica (2). Supponiamo, per assurdo, che le valutazioni v, w siano indipendenti. Allora, poiché le topologie $\mathscr{T}_v$ e $\mathscr{T}_w$ coincidono e le valutazioni v, w sono non banali, dalla Proposizione (4.2), dal Corollario (5.10), e dalla Proposizione (3.3) segue subito che $K^2 = \overline{\Delta_2} = \Delta_2$, contro il fatto che $(1, 0) \in K^2 \backslash \Delta_2$.
(2) implica (1). Siano v, w valutazioni dipendenti, siano A, B gli anelli di valutazione determinati da v, w rispettivamente. Allora, per definizione, esiste un sottoanello proprio di C di K tale che $A, B \subseteq C$. Essendo C un anello di valutazione di K ([1, Proposizione (4.9(a))]), esiste una valutazione u di K che determina C. Mostriamo che le topologie $\mathscr{T}_v, \mathscr{T}_u$ coincidono. Siano Γ, Δ i gruppi dei valori di v, u, rispettivamente, U un aperto di $\mathscr{T}_u$, e sia $x \in U$. Poiché, in particolare, U è un intorno di x, esiste un elemento $\delta \in \Delta$ tale che $x + V_\delta \subseteq U$. Poiché u è non banale, possiamo fissare in Δ un elemento positivo $\delta' > \delta$. Detto y un elemento di K tale che $u(y) = \delta'$ (ogni valutazione è surgettiva), poniamo $\gamma = v(y)$, e fissiamo un elemento $z \in V_\gamma$. Allora $v(z) > \gamma = v(y)$, e quindi $zy^{-1} \in A$, in particolare. Essendo $A \subseteq C$, risulta $u(z) \geq u(y) = \delta' > \delta$. Dunque si ha $x \in x + V_\gamma \subseteq x + V_\delta \subseteq U$. Questo prova che $U \in \mathscr{T}_v$. Con un argomento analogo al precedente si dimostra l'inclusione inversa. Inoltre, scambiando i ruoli di v e w, si ottiene $\mathscr{T}_u = \mathscr{T}_w$, e quindi l'asserto. □

5.12 Corollario. *Sia K un campo. La relazione di dipendenza è una relazione di equivalenza nell'insieme delle valutazioni non banali di K.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla Proposizione (5.11). □

Useremo fra poco la seguente proprietà.

5.13 Proposizione. *Siano K un campo ed A un anello di valutazione di K. Allora l'inclusione stabilisce un ordine totale nell'insieme dei sovranelli di A.*

Dimostrazione. Basta osservare che, per [1, Corollario (4.10)], la corrispondenza $\mathfrak{p} \mapsto A_\mathfrak{p}$ è una biezione che inverte l'ordine fra $\mathrm{Spec}(A)$ e l'insieme dei sovranelli di A, e tenere presente che $\mathrm{Spec}(A)$ è totalmente ordinato dall'inclusione. □

5.14 PROPOSIZIONE. *Siano K un campo e $\{v_i : i = 1, \ldots, n\}$ ($n \geq 2$) una collezione finita di valutazioni di K tali che v_i e v_j sono dipendenti per ogni i, j. Allora, detti $A_1, \ldots, A_n$ gli anelli di valutazione associati a $v_1, \ldots, v_n$, rispettivamente, il sottoanello di K generato da $A_1, \ldots, A_n$ è propriamente contenuto in K.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo l'asserto per induzione su n. Per $n = 2$, la proposizione è vera per definizione. Supponiamo allora che l'asserto sia vero per ogni $k \in \{2, \ldots, n-1\}$. Dunque possiamo fissare sottoanelli propri B, C di K tali che $B \supseteq A_1, \ldots, A_{n-1}$ e $C \supseteq A_{n-1}, A_n$. Poiché B, C sono sovranelli dell'anello di valutazione A_{n-1}, essi sono confrontabili, per la Proposizione (5.13). A questo punto è facile rendersi conto che il più grande fra B e C contiene tutti gli anelli $A_1, \ldots, A_n$. Questo completa la dimostrazione. $\square$

6 Anelli di valutazione: ulteriori proprietà

6.1 Caratterizzazione degli elementi interi

Come è ben noto, ogni anello di valutazione A è integralmente chiuso (nel suo campo dei quozienti K). Vogliamo adesso dare una caratterizzazione degli elementi di un'arbitrario ampliamento L di K che sono interi su A. Useremo il seguente risultato.

6.1 LEMMA. *Siano L un campo, A un sottoanello di L, $x \in L$ non intero su A. Allora valgono le seguenti asserzioni.*

(i) *La famiglia $\mathcal{F}$ degli ideali massimali di $A[x^{-1}]$ contenenti x^{-1} è non vuota.*

(ii) *Per ogni $\mathfrak{m} \in \mathcal{F}$, $\mathfrak{m} \cap A$ è un ideale massimale di A.*

DIMOSTRAZIONE. (i) Mostriamo che $x \notin A[x^{-1}]$. Infatti, altrimenti si avrebbe $x = a_n x^{-n} + a_{n-1} x^{-n+1} + \ldots + a_0$, per opportuni $a_0, \ldots, a_n \in A$. Allora, moltiplicando entrambi i membri della precedente uguaglianza per x^n, si otterrebbe una relazione di dipendenza integrale di x su A, una contraddizione. Dal fatto che $x \notin A[x^{-1}]$ segue immediatamente che x^{-1} non è invertibile in $A[x^{-1}]$. Dunque, esiste un ideale massimale di $A[x^{-1}]$ contenente x^{-1}.
(ii). Siano $\mathfrak{m} \in \mathcal{F}$ e $f : A \longrightarrow A[x^{-1}]/\mathfrak{m}$ la composizione dell'inclusione di A in $A[x^{-1}]$ con la proiezione canonica. Allora f è un omomorfismo di anelli

surgettivo, poiché $\mathfrak{m}$ contiene x^{-1}, e inoltre $\mathrm{Ker}(f) = \mathfrak{m} \cap A$, ovviamente. L'asserto segue immediatamente. □

Siano A, B anelli locali, $\mathfrak{m}(A), \mathfrak{m}(B)$ i rispettivi massimali. Diremo che B domina A se A è un sottoanello di B e $\mathfrak{m}(A) \subseteq \mathfrak{m}(B)$ (equivalentemente $\mathfrak{m}(A) = \mathfrak{m}(B) \cap A$), e scriveremo $A \prec B$.

6.2 TEOREMA. *Sia L un campo e A un sottoanello locale di L. Allora la chiusura integrale di A in L è l'intersezione di tutti gli anelli di valutazione di L che dominano A.*

DIMOSTRAZIONE. Se x è un elemento di L intero su A, allora x è intero su ogni anello di valutazione di L che domina A, in particolare. Allora $\overline{A}^L \subseteq \bigcap\{V \in \mathrm{Zar}(L) : A \prec B\}$, essendo ogni anello di valutazione integralmente chiuso. Viceversa, sia x un elemento di L non integrale su A. Allora, posto $B := A[x^{-1}]$, esiste un ideale massimale $\mathfrak{m}$ di B tale che $x^{-1} \in \mathfrak{m}$ (Lemma (6.1(i))). Per [1, Teorema (4.15)], il sottoanello locale $B_\mathfrak{m}$ di K è dominato da un anello di valutazione V di L, dunque $\mathfrak{m}B_\mathfrak{m} = B_\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}(V)$. Inoltre, a norma del Lemma (6.1(ii)), si ha $\mathfrak{m}(A) = \mathfrak{m} \cap A$, essendo A un anello locale. Allora

$$A \cap \mathfrak{m}(V) = A \cap B_\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}(V) = A \cap \mathfrak{m}B_\mathfrak{m} = A \cap B \cap \mathfrak{m}B_\mathfrak{m} = A \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{m}(A).$$

Questo prova che V domina A. Dunque, per concludere la dimostrazione, basta far vedere che $x \notin V$. Questo segue dal fatto che $x^{-1} \in \mathfrak{m}B_\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}(V)$
□

6.3 LEMMA. *Siano L/K un ampliamento di campi, V un anello di valutazione di L. Allora valgono le seguenti asserzioni.*

(i) *$V \cap K$ è un anello di valutazione di K il cui massimale è $\mathfrak{m}(V) \cap K$. Inoltre V domina $V \cap K$.*

(ii) *Se A è un anello di valutazione di K, allora V domina A se e soltanto se $V \cap K = A$.*

DIMOSTRAZIONE. (i) è conseguenza immediata delle definizioni.
(ii). Se V domina A, allora è immediatamente visto che $V \cap K$ domina A. Essendo A un anello di valutazione, A è massimale nell'insieme dei sottoanelli locali di K, ordinato parzialmente dalla relazione di dominanza, per [1,

Corollario (4.18)]. Dunque $V \cap K = A$, per (i). Se $V \cap K = A$, allora $A \subseteq V$. Inoltre, se $x \in \mathfrak{m}(A)$, allora $x^{-1} \in K \setminus A$. Dunque $x^{-1} \notin V$, ovvero $x \in \mathfrak{m}(V)$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

6.4 Corollario. *Siano L/K un ampliamento di campi, A un anello di valutazione di K. Allora $\overline{A}^L = \bigcap\{V \in \mathrm{Zar}(L) : V \cap K = A\}$.*

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema (6.2) e il Lemma (6.3(ii)). $\square$

6.2 Descrizione degli ideali

Siano K un campo, $v : K \longrightarrow \Gamma_\infty$ una valutazione di K, Γ_+ l'insieme degli elementi non negativi di Γ. Vogliamo caratterizzare gli ideali dell'anello associato a v tramite particolari sottoinsiemi di Γ_+

6.5 Definizione. *Sia Γ un insieme totalmente ordinato. Un sottoinsieme F di Γ si dice* filtro di Γ *se, dal fatto che $\alpha \in F$ e $\beta \geq \alpha$, segue $\beta \in F$.*

6.6 Proposizione. *Siano K un campo, $v : K \longrightarrow \Gamma_\infty$ una valutazione di K, A l'anello di valutazione associato a v. Per ogni filtro F di Γ_+, poniamo $F^\sharp := v^{-1}(F \cup \{\infty\})$. Per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di A poniamo $\mathfrak{a}_\sharp := v(\mathfrak{a} \setminus \{0\})$. Allora $F \mapsto F^\sharp$ è una biezione fra l'insieme dei filtri di Γ_+ e l'insieme degli ideali di A. Tale biezione preserva l'inclusione e la sua inversa è data da $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}_\sharp$. Sia $P(\Gamma)$ l'insieme degli elementi positivi di Γ. Allora, si ottiene, per restrizione, una biezione fra gli ideali propri di A è i filtri di $P(\Gamma)$.*

Dimostrazione. Si tratta di verifiche immediate. $\square$

6.3 Moduli su anelli di valutazione

6.7 Teorema. *Siano A un anello di valutazione e X un $A-$modulo privo di torsione e finitamente generato. Allora X è libero.*

Dimostrazione. Sia $Y := \{x_1, \ldots, x_n\}$ un insieme minimale di generatori di X distinti. Sarà sufficiente dimostrare che Y è $A-$linearmente indipendente. Supponiamo, per assurdo, che esistano $a_1, \ldots, a_n \in A$ non tutti nulli tali che $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$. Poiché l'insieme degli ideali di un anello di valutazione è totalmente ordinato dall'inclusione, si ha $(a_n) \subseteq \ldots \subseteq (a_1)$, a meno di un cambiare l'indicizzazione. Allora si ha $a_1 \neq 0$, essendo la relazione di dipendenza lineare fissata non banale, e inoltre a_1 divide a_i, per ogni i.

Dunque possiamo scrivere $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1(x_1 + \sum_{i=2}^{n} a'_i x_i) = 0$, per opportuni $a'_2, \ldots, a'_n \in A$. Poiché $a_1 \neq 0$ e X è privo di torsione, segue immediatamente $x_1 + \sum_{i=2}^{n} a'_i x_i = 0$, e quindi $Y \setminus \{x_1\}$ è un insieme di generatori di A, contro la minimalità di Y. □

6.4 Anelli di valutazione e posti

6.8 Lemma. *Siano K un campo, A e B anelli di valutazione di K tali che $A \subseteq B \subseteq K$. Allora $\mathfrak{m}(B) \subseteq A$.*

Dimostrazione. Per assurdo esista un elemento $x \in \mathfrak{m}(B) \setminus A$. Poiché A è un anello di valutazione, allora $x^{-1} \in A \subseteq B$, quindi $1 \in \mathfrak{m}(B)$.

6.9 Proposizione. *Siano K un campo e B un anello di valutazione di K. Siano, inoltre, $\kappa(B)$ il campo residuo di B e $h_B : K_\infty \longrightarrow \kappa(B)_\infty$ il posto associato a B. Allora la mappa $A \mapsto h_B(A)$ stabilisce una biiezione tra l'insieme $\mathcal{U}$ degli anelli di valutazione di K contenuti in B e l'insieme $\mathcal{U}'$ degli anelli di valutazione di $\kappa(B)$.*

Dimostrazione. Mostriamo, prima di tutto, che la mappa è ben definita. Sia $A \in \mathcal{U}$ e supponiamo che $x' = h_B(x) \notin h_B(A)$ per qualche $x \in B$. Poiché $x \notin A$ allora $x^{-1} \in A$, dunque $h_B(x^{-1}) = (h_B(x))^{-1} \in h_B(A)$.

Siano, adesso, A_1 e A_2 due anelli di valutazione di K contenuti in B tali che $h_B(A_1) = h_B(A_2)$. Proviamo l'inclusione $A_1 \subseteq A_2$. Sia $x \in A_1$, esiste un elemento $y \in A_2$ tale che $x' = h_B(x) = h_B(y)$. Per il Lemma 6.8 $x - y \in \mathfrak{m}(B) \subseteq A_2$, quindi $x \in A_2$.

Infine, sia $A' \in \mathcal{U}'$ e consideriamo $A = h_B^{-1}(A') \subset B$. Per concludere la prova è sufficiente mostrare che $A \in \mathcal{U}$.

Sia $x \in K \setminus A$ e distinguiamo due casi:

(1) Se $x \notin B$ allora $x^{-1} \in \mathfrak{m}(B) \subseteq A$

(2) Se $x \in B$ allora $h_B(x) \in \kappa(B) \setminus A'$, quindi $h_B(x^{-1} = (h_B(x))^{-1} \in A'$ e, infine, $x^{-1} \in A$.

6.10 Corollario. *Siano K un campo, A, B due anelli di valutazione di K tali che $A \subseteq B \subseteq K$ e h_B il posto associato a B. Allora, posto $A' = h_B(A)$, si ha $\kappa(A') \cong \kappa(A)$ canonicamente e $h_A = h_{A'} \circ h_B$.*

Dimostrazione. Basta osservare che $A' = A/\mathfrak{m}(B)$ e che

$$\kappa(A') = A'/\mathfrak{m}(A') \cong (A/\mathfrak{m}(B))(\mathfrak{m}(A)/\mathfrak{m}(B)) \cong A/\mathfrak{m}(A) = \kappa(A).$$

6.11 COROLLARIO. *Siano A, B, K come nel corollario precedente e sia $\pi : B \longrightarrow \kappa(B)$ l'omomorfismo canonico. Posto $A' = \pi(A)$, allora*

$$\pi^{-1}(\kappa(B)^*) = \mathcal{U}(B), \pi^{-1}(A') = A, \pi^{-1}(\mathfrak{m}(A')) = \mathfrak{m}(A), \pi^{-1}(\mathcal{U}(A')) = \mathcal{U}(A).$$

Inoltre si ha un isomorfismo canonico tra $\mathcal{U}(B)/\mathcal{U}(A)$ e $\kappa(B)^*/\mathcal{U}(A') = \Gamma_{A'}$, quindi dalla sequenza esatta

$$0 \to \mathcal{U}(B)/U(A) \to \Gamma_A = K^*/\mathcal{U}(A) \to \Gamma_B \cong (K^*/\mathcal{U}(A))/(\mathcal{U}(B)/U(A)) \to 0.$$

si ottiene l'esattezza della sequenza

$$0 \longrightarrow \Gamma_{A'} \longrightarrow \Gamma_A \longrightarrow \Gamma_B \longrightarrow 0.$$

6.12 LEMMA. *Siano K un campo e A, B due anelli di valutazione di K tali che $A \subseteq B \subseteq K$, ($\mathcal{U}(A) \subseteq \mathcal{U}(B)$). Siano, inoltre, $\lambda : \Gamma_A \longrightarrow \Gamma_B$ l'omomorfismo canonico (suriettivo), $H_B = \mathcal{U}(B)/\mathcal{U}(A)$ e v_A, v_B le valutazioni canoniche di K definite, rispettivamente, da A e B. Allora valgono le seguenti asserzioni:*

(1) $v_B = \lambda \circ v_A$.

(2) *λ è un omomorfismo crescente tra gruppi totalmente ordinati. In particolare il nucleo H_B di λ è un sottogruppo isolato di Γ_A.*

(3) *λ si fattorizza nel seguente modo: $\Gamma_A \longrightarrow \Gamma_A/H_B \xrightarrow{\mu} \Gamma_B$, dove μ è un isomorfismo crescente di gruppi totalmente ordinati.*

7 Spazi vettoriali topologici su un campo topologico

7.1 PROPOSIZIONE. *Siano K un campo, $v : K \longrightarrow \Gamma_\infty$ una valutazione non banale su K ed E un $K-$spazio vettoriale topologico di Hausdorff di dimensione 1. Allora, per ogni $x_0 \in E \backslash \{0\}$, la mappa $\phi : K \longrightarrow E$, $a \mapsto ax_0$, è simultaneamente un isomorfismo e un omeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Ovviamente ϕ è un isomorfismo continuo, per definizione di spazio vettoriale topologico. Dunque è sufficiente mostrare che ϕ è aperta. Fissiamo $\alpha \in \Gamma$. Mostriamo che, per un opportuno intorno V dello 0 in E, si ha $V \subseteq \phi(V_\alpha)$. Sia $a_0 \in K^*$ tale che $v(a_0) = \alpha$ (ogni valutazione è surgettiva, per definizione). Poiché E è di Hausdorff, esiste un intorno W di 0 tale che $a_0x_0 \notin W$. Vogliamo mostrare, intanto, che esistono un intorno W' di 0 in E e un elemento $\beta \in \Gamma$ tali che, se $y \in W'$ e $v(a) \geq \beta$, allora $ay \in W$. Poiché la funzione $K \times E \longrightarrow E$, $(a, x) \mapsto ax$, è continua, in particolare in $(0, 0)$, esistono $\gamma \in \Gamma$ e un intorno W' di 0 in E tali che $cy \in W$, per ogni $c \in V_\gamma, y \in W'$. Essendo v non banale, basta scegliere un elemento $\beta > \gamma$. Sia $a_1 \in K^*$ tale che $v(a_1) = -\beta$, e sia $V := a_1^{-1}W'$. Vogliamo verificare che $V \subseteq \phi(V_\alpha)$. Supponiamo, per assurdo, che esista $a \in K^*$ tale che $ax_0 \in V$ e $v(a) \leq \alpha$. Dal fatto che $ax_0 \in V$, segue che $a_1ax_0 \in W'$. Inoltre $v(a_0a^{-1}a_1^{-1}) = \alpha + \beta - v(a) \geq \beta$, e quindi $a_0x_0 = a_0a^{-1}a_1^{-1}(a_1a_0x_0) \in W$, una contraddizione. □

7.2 Osservazione. Siano E uno spazio vettoriale topologico su un campo K, e sia G sottospazio vettoriale di E.

(i) Gli aperti (risp. chiusi) dello spazio vettoriale topologico E/G (munito della topologia quoziente), sono della forma $\Omega + G$, con Ω aperto (risp. chiuso) in E.

(ii) Inoltre, se G è chiuso, allora E/G è di Hausdorff, in virtù della Proposizione (3.4(iv)).

7.3 Corollario. *Siano K come nella Proposizione (7.1), F un $K-$spazio vettoriale topologico e G un iperpiano chiuso di E. Sia inoltre D un sottospazio di F tale che $F = G \oplus D$. Allora, detto $x_0 \in E$ un generatore di D, l'applicazione $K \longrightarrow D$, $a \mapsto ax_0$ è simultaneamente un isomorfismo e un omeomorfismo.*

Dimostrazione. In virtù della Proposizione (7.1), sarà sufficiente dimostrare che D è di Hausdorff. Siano $\lambda x_0, \mu x_0$ due punti distinti in D. Consideriamo gli elementi $\lambda x_0 + G, \mu x_0 + G$ dello spazio vettoriale topologico F/G. Per costruzione, tali elementi sono distinti. Poiché, per l'Osservazione (7.2(ii)), lo spazio F/G è di Hausdorff, esistono intorni aperti U, V di 0 in F tali che $(\lambda x_0 + U + G) \cap (\mu x_0 + V + G) = \emptyset$. Si deduce immediatamente che $(\lambda x_0 + U) \cap D$, $(\mu x_0 + V) \cap D$ sono intorni aperti in D disgiunti di $\lambda x_0, \mu x_0$, rispettivamente. Questo conclude la dimostrazione. □

7.4 Proposizione. *Siano K un campo, $v : K \longrightarrow \Gamma_\infty$ una valutazione non banale su K ed E un $K-$spazio vettoriale topologico di Hausdorff di* *dimensione finita n. Se K è completo, allora, per ogni base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ di E, l'applicazione $K^n \longrightarrow E$, $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i e_i$ è simultaneamente un isomorfismo e un omeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per induzione su n. Il caso $n = 1$ segue immediatamente dalla Proposizione (7.1). Sia adesso $n > 1$, supponiamo che l'asserto sia vero per $n-1$, che E abbia dimensione n, e fissiamo un sottospazio vettoriale G di E avente dimensione $n-1$. Essendo G di Hausdorff, per l'ipotesi induttiva G è omeomorfo a K^{n-1} e, poiché, in particolare, K^{n-1} è completo, G è chiuso, stante la Proposizione (3.33). Detto D un sottospazio di E tale che $E = D \oplus G$, dal Corollario (7.3) segue che D è omeomorfo a K. L'asserto segue quindi immediatamente, tenendo presente la Proposizione (3.4(vii)). □

7.5 COROLLARIO. *Siano K, v come nella Proposizione (7.4). Siano E un $K-$spazio vettoriale topologico di Hausdorff e F un sottospazio di E di dimensione finita. Allora F è chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Segue subito dalla Proposizione (7.4). □

8 Estensioni di una valutazione a un ampliamento algebrico

8.1 LEMMA. *Sia X un $A-$modulo libero. Allora X è $A-$piatto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f : Y \longrightarrow Z$ una $A-$immersione. Per ipotesi, esiste un insieme I tale che $A^{(I)}$ è isomorfo a X. Per una ben nota proprietà del prodotto tensioriale, si ha subito $P \otimes_A A \cong P$, e quindi $X \otimes_A Y \cong Y^{(I)}$, $X \otimes_A Z = Z^{(I)}$. Dunque $f \otimes_A 1 : Y^{(I)} \longrightarrow Z^{(I)}$. Questo prova l'asserto. □

8.2 OSSERVAZIONE. Siano L/K un ampliamento di campi, v una valutazione di K.

(i) L è $K-$libero, e quindi $K-$piatto (Lemma (8.1)).

(ii) Consideriamo l'inclusione $K \subseteq \widehat{K}$. Per la (i), tensorizzando per L, si ottiene l'immersione $L \hookrightarrow \widehat{K} \otimes_K L$. In modo analogo, tensorizzando per $\widehat{K}$ l'inclusione $K \subseteq L$, si ottiene l'immersione $\widehat{K} \hookrightarrow \widehat{K} \otimes_K L$.

(iii) Sia adesso v' una valutazione di L che estende v, e sia $f : \widehat{K} \times L \longrightarrow \widehat{L}$ l'applicazione $K-$bilineare $(x, l) \mapsto xl$. Allora, per la proprietà universale, f induce un'unica applicazione $K-$lineare $f' : \widehat{K} \otimes_K L \longrightarrow \widehat{L}$. Si osservi che f' è anche $\widehat{K}-$lineare.

Siano L/K un ampliamento di campi, $v : K \longrightarrow \Gamma_\infty$ una valutazione di K, $v' : L \longrightarrow \Delta_\infty$ una valutazione di L che estende v. Ricordiamo che *l'indice di ramificazione* $e(v'/v)$ è l'indice di Γ in Δ. Detti A_v, $A_{v'}$ gli anelli di valutazione di v, v' rispettivamente, e $\kappa(A_v)$, $\kappa(A_{v'})$ i campi residui di $A_v, A_{v'}$ rispettivamente, ricordiamo che il *grado residuo* $f(v'/v)$ è il grado dell'ampliamento di campi $\kappa(A_{v'})/\kappa(A_v)$.
I prossimi risultati ci permetteranno di mettere in relazione i gruppi dei valori di due valutazioni tali che una estende l'altra.

8.3 Proposizione. *Siano L/K un ampliamento di campi algebrico, $v : K \longrightarrow \Gamma_\infty$ una valutazione di K e $w : L \longrightarrow \Delta_\infty$ una valutazione di L che estende K. Allora Δ/Γ è un gruppo di torsione.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ la collezione dei sottocampi F di L contenenti K come sottocampo e tali che l'ampliamento F/K è finito. Per ogni $F \in \mathcal{F}$, indichiamo con G_F il gruppo $w(F^*)$. Per ipotesi, Γ è un sottogruppo di G_F, per ogni $F \in \mathcal{F}$. Mostriamo che risulta $\Delta = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} G_F$. Fissato $\delta \in \Delta$, esiste $x \in L$ tale che $w(x) = \delta$. Poiché, per ipotesi, x è algebrico su K, risulta $K(x) \in \mathcal{F}$, e quindi $\delta \in G_{K(x)} \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{F}} G_F$. Da quanto provato adesso, segue immediatamente che $\Delta/\Gamma = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} (G_F/\Gamma)$. A questo punto, per [1, Proposizione (5.1)], il gruppo G_F/Γ è finito, e quindi di torsione, per ogni $F \in \mathcal{F}$. Segue dunque l'asserto. $\square$

Ricordiamo adesso che un sottogruppo Δ di un gruppo abeliano totalmente ordinato Γ si dice *isolato* se, dal fatto che $0 \leq \alpha \leq \beta$, con $\alpha \in \Gamma, \beta \in \Delta$, segue $\alpha \in \Delta$. Indicheremo con $\mathfrak{S}(\Gamma)$ la collezione dei sottogruppi isolati di Γ.

8.4 Proposizione. *Siano Γ un gruppo abeliano totalmente ordinato e Δ un sottogruppo di Γ.*

(i) *L'applicazione $\mathfrak{S}(\Gamma) \longrightarrow \mathfrak{S}(\Delta)$, $H \mapsto H \cap \Delta$, è surgettiva.*

(ii) *Se Γ/Δ è di torsione, allora l'applicazione definita in (i) è biunivoca.*

Dimostrazione. (i). Dalla definizione, segue subito che $H \cap \Delta \in \mathfrak{S}(\Delta)$, per ogni $H \in \mathfrak{S}(\Gamma)$. Sia adesso N un sottogruppo isolato di Δ. Allora, si verifica immediatamente che l'insieme

$$H_N := \{\alpha \in \Gamma : [-\beta \leq \alpha \leq \beta \text{ per qualche } \beta \in N]\}$$

è un sottogruppo di Γ. Siano adesso $\alpha \in H_N$ e $\gamma \in \Gamma$ tali che $0 \leq \gamma \leq \alpha$. Per definizione, esiste $\beta \in N$ tale che $-\beta \leq \alpha \leq \beta$. Siccome $0 \leq \alpha \leq \beta$, si ha $-\beta \leq 0 \leq \gamma \leq \alpha \leq \beta$, e quindi $\gamma \in H_N$, per costruzione. Questo prova che H_N è isolato. A questo punto, per provare la (i) basta verificare che $H_N \cap \Delta = N$. L'inclusione $N \subseteq H_N \cap \Delta$ è evidente. Viceversa, sia $\alpha \in H_N \cap \Delta$. Dunque, esiste un elemento $\beta \in N$ tale che $-\beta \leq \alpha \leq \beta$. Se $0 \leq \alpha \leq \beta$, si ha $\alpha \in N$, poiché N è isolato. Se $-\beta \leq \alpha \leq 0$, allora $0 \leq -\alpha \leq \beta$. Poiché N è isolato, si ha $-\alpha \in N$, ovvero $\alpha \in N$.
(ii). Resta da far vedere che l'applicazione definita in (i) è iniettiva, se Γ/Δ è di torsione. Dunque, siano N_1, N_2 sottogruppi isolati di Γ tali che $N_1 \cap \Delta = N_2 \cap \Delta$. Ovviamente, basterà dimostrare che $N_1 \subseteq N_2$. Per assurdo, supponiamo che esista un elemento $\alpha \in N_1 \backslash N_2$. Non è restrittivo assumere che sia $\alpha > 0$. Poiché, Γ/Δ è di torsione, esiste un numero naturale n tale che $n(\alpha + \Delta) = 0$. Pertanto $n\alpha \in N_1 \cap \Delta = N_2 \cap \Delta$, e quindi $\alpha \in N_2$, essendo $0 < \alpha \leq n\alpha$ e $n\alpha \in N_2$, una contraddizione. Questo conclude la dimostrazione. □

Illustriamo adesso una importante conseguenza del precedente risultato.

8.5 Corollario. *Siano L/K un ampliamento di campi algebrico, $v : K \longrightarrow \Gamma_\infty$ una valutazione di K e $w : L \longrightarrow \Delta_\infty$ una valutazione di L che estende K. Allora v è banale se e soltanto se w è banale.*

Dimostrazione. Supponiamo che v sia banale. Poiché $\{0\}, \Delta$ sono sottogruppi isolati di Δ e $\Delta \cap \Gamma = \{0\} = \{0\} \cap \Gamma$, si ha $\Delta = \{0\}$, in virtù delle Proposizioni (8.3) e (8.4(ii)). □

Premettiamo un fatto di Topologia Generale, la cui verifica è immediata.

8.6 Osservazione. Siano X uno spazio topologico, $Z \subseteq Y$ suoi sottospazi. Se Z è denso in Y e Y è denso in X, allora Z è denso in X.

Possiamo enunciare il primo risultato notevole della sezione.

8.7 TEOREMA. *Siano L/K un ampliamento di campi finito di grado n, v una valutazione di K, $\widehat{v}$ l'estensione continua di v a $\widehat{K}$ (Teorema (4.7(i))). Allora valgono le seguenti asserzioni.*

(a) *Siano v' una valutazione di L che estende v, $\widehat{L}_{v'}$ il completamento di L rispetto a v', e $\widehat{v'}$ l'estensione continua di v' a $\widehat{L}_{v'}$. Identificando $\widehat{K}$ con la chiusura di K in $\widehat{L}_{v'}$, allora:*

(a1) $e(\widehat{v'}/\widehat{v}) = e(v'/v)$, $f(\widehat{v'}/\widehat{v}) = f(v'/v)$.

(a2) $e(v'/v)f(v'/v) \leq [\widehat{L}_{v'} : \widehat{K}] \leq n$.

(b) *Sia v non banale. Siano $w_1, \ldots, w_s$ valutazioni di L a due a due indipendenti che estendono v. Per ogni $i = 1, \ldots, s$, siano L_i lo spazio topologico L munito della topologia definita da w_i, $\widehat{L}_i$ il completamento di L_i, e n_i il grado dell'ampliamento di campi $\widehat{L}_i/\widehat{K}$. Allora, l'applicazione $\phi : \widehat{K} \otimes_K L \longrightarrow \prod_{i=1}^{s} \widehat{L}_i$, definita, componente per componente, come nell'Osservazione (8.2(iii)), è surgettiva, e si ha $\sum_{i=1}^{s} n_i \leq n$.*

(c) *Se v è non banale, allora ogni insieme di valutazioni di L a due a due indipendenti che estendono v è finito.*

DIMOSTRAZIONE. (a). Se v è banale, allora è banale anche v', stante il Corollario (8.5). Dunque K e L sono discreti, e quindi completi. Pertanto le asserzionida provare sono evidenti, in virtù di [1, Proposizione (5.6)]. Supponiamo adesso v non banale. Poiché $v, \widehat{v}$ (risp. $v', \widehat{v'}$) hanno stesso gruppo dei valori e stesso campo residuo (Teorema (4.7(i,vi))), la (a1) è immediata. Sia adesso X il $\widehat{K}-$sottospazio vettoriale di $\widehat{L}_{v'}$ generato da L. Se $\{l_1, \ldots, l_n\}$ è una base L come $K-$spazio vettoriale, allora è immediatamente visto che $\{l_1, \ldots, l_n\}$ è un sistema di generatori di X come $\widehat{K}-$spazio vettoriale, quindi $\dim_{\widehat{K}}(X) \leq n$. Allora, essendo $\widehat{L}_{v'}$ di Hausdorff e X finitamente generato sul campo completo $\widehat{K}$, dal Corollario (7.5) segue che X è chiuso. Dunque, essendo L un sottospazio denso di $\widehat{L}_{v'}$ (Proposizione (4.2(ii))), si ha immediatamente $X = \widehat{L}_{v'}$, e infine $[\widehat{L}_{v'} : \widehat{K}] = \dim_{\widehat{K}}(X) \leq n$. Poiché, per quanto appena visto, l'ampliamento di campi $\widehat{L}_{v'}/\widehat{K}$ è finito, la disuguaglianza $e(v'/v)f(v'/v) \leq [\widehat{L}_{v'} : \widehat{K}]$ segue da [1, Proposizione (5.6)] e da (a1).
(b) e (c). Osserviamo intanto che $\widehat{K}, L$ (e in particolare K) sono immersi in $\widehat{K} \otimes_K L$, per l'Osservazione (8.2(ii)). Poiché le valutazioni $w_1, \ldots, w_s$ sono a due a due indipendenti e non banali (tale essendo v), la diagonale Δ,

immagine canonica di L mediante ϕ, è densa in $\prod_{i=1}^{s} L_i$, in virtù del Corollario (5.10). Inoltre $\prod_{i=1}^{s} L_i$ è denso in $\prod_{i=1}^{s} \widehat{L}_i$ (Proposizione (4.2(ii))). Dunque, poiché l'immagine Y di $\widehat{K} \otimes_K L$ mediante ϕ contiene Δ, segue subito che l'insieme Y è denso in $\prod_{i=1}^{s} \widehat{L}_i$ (Osservazione (8.6)). Poiché, per (a2), $\widehat{L}_i$ è di dimensione finita su $\widehat{K}$, allora $\prod_{i=1}^{s} \widehat{L}_i$, e a fortiori Y, sono di dimensione finita su $\widehat{K}$. Dunque, ancora per il Corollario (7.5), Y è chiuso e quindi ϕ è surgettiva. Inoltre, si verifica subito che, se $\{l_1, \ldots, l_n\}$ è una base di L su K, allora $\{1 \otimes_K l_1, \ldots, 1 \otimes_K l_n\}$ è un sistema di generatori di $\widehat{K} \otimes_K L$ come $\widehat{K}-$spazio vettoriale. Dunque, poiché l'applicazione ϕ è $\widehat{K}-$lineare (Osservazione (8.2(iii))) e surgettiva, si ha $\sum_{i=1}^{s} n_i \leq \dim_{\widehat{K}}(\prod_{i=1}^{s} \widehat{L}_i) + \dim_{\widehat{K}}(\mathrm{Ker}(\phi)) = \dim_{\widehat{K}}(\widehat{K} \otimes_K L) \leq n$. Da questo segue subito che $s \leq n$. A questo punto, (c) è una conseguenza immediata di quanto appena visto: se esistesse un insieme infinito di valutazioni a due a due indipendenti che estendono v, basterebbe sceglierne ad arbitrio $n+1$, per ottenere una contraddizione con l'ultima disuguaglianza vista. $\square$

8.8 Corollario. *Siano L/K un ampliamento di campi finito di grado n, v una valutazione di K e $\mathcal{V}$ una collezione finita di valutazioni di L che estendono K a due a due indipendenti. Allora*

$$\sum_{w \in \mathcal{V}} e(w/v) f(w/v) \leq n.$$

Dimostrazione. Se v è banale allora ogni estensione di v a L è banale, per il Corollario (8.5). Dunque l'unico elemento di $\mathcal{V}$ è la valutazione banale w di L, e $e(w/v)f(w/v) = n$. Se v è non banale, l'asserto è una conseguenza immediata del Teorema (8.7(a2,b)). $\square$

Useremo adesso il Teorema (8.7) per generalizzare la disuguaglianza del Corollario (8.8), quando le valutazioni di $\mathcal{V}$ non sono necessariamente a due a due indipendenti.

8.9 Definizione. *Siano L/K un ampliamento di campi e v una valutazione di K. Una collezione $\mathcal{V}$ di valutazioni di L che estendono v si dice* sistema completo di estensioni di v a L *se ogni valutazione di L che estende v è equivalente a una e una sola valutazione di $\mathcal{V}$.*

8.10 Teorema. *Siano L/K un ampliamento di campi finito di grado n, v una valutazione di K, $\mathcal{V}$ un sistema completo di estensioni di v a L. Allora valgono le seguenti asserzioni.*

(a) *$\mathcal{V}$ è finito.*

(b) $\displaystyle\sum_{w\in\mathcal{V}} e(w/v)f(w/v) \leq n$. *In particolare* $\mathrm{Card}(\mathcal{V}) \leq n$.

(c) *Gli anelli di valutazione A_w, con $w \in \mathcal{V}$, sono a due a due incomparabili.*

Dimostrazione. Possiamo assumere che v sia non banale. Sia $\mathcal{V}' := \{w_1, \cdots, w_s\}$ una collezione finita di estensioni di v a L a due a due non equivalenti. Le asserzioni (a), (b) seguiranno immediatamente se proviamo che $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} e(w_i/v)f(w_i/v) \leq n$. Proviamo questa disuguaglianza per induzione su s. Se $s = 0$ non vi è nulla da provare. Se $s = 1$, basta usare [1, Proposizione (5.6)]. Se $s = 2$ e le valutazioni sono indipendenti, la tesi segue dal Teorema (8.7).

Nel caso in cui le valutazioni sono indipendenti, sia A'_i l'anello di valutazione di v'_i $(1 \leq i \leq 2)$, e A l'anello di valutazione di v. Ovviamente $A'_i \cap K = A$ per ogni i. In virtù della Proposizione (5.14) $B' =< A'_1, A'_2 >\subsetneq L$. Posto $B = B' \cap K$, la relazione $B \supset A$ implica che B è l'anello di una valutazione w su K e B' è l'anello di una valutazione w' non banale su L che estende w.

Osserviamo che le immagini canoniche $\overline{A'_i}, \overline{A}$ di A'_i e A in $\kappa(B')$ sono, rispettivamente, anelli di valutazioni $\overline{v'_i}, \overline{v}$ su $\kappa(B')$ e $\kappa(B)$ (Proposizione (6.9). Inoltre, ogni valutazione $\overline{v'_i}$ su $\kappa(B')$ estende $\overline{v}$.

Dal momento che gli anelli A'_i generano B', allora gli $\overline{A'_i}$ generano $\kappa(B')$, dunque, stante la Proposizione (5.14), le due valutazioni $\overline{v'_1}, \overline{v'_2}$ sono indipendenti. Adesso, per la parte (1) della dimostrazione si ha

$$\sum_{i=1}^{2} e(\overline{v'_i}/\overline{v})f(\overline{v'_i}/\overline{v}) \leq [\kappa(B') : \kappa(B)] = f(w'/w)$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^{2} e(w'/w)e(\overline{v'_i}/\overline{v})f(\overline{v'_i}/\overline{v}) \leq e(w'/w)f(w'/w) \leq n,$$

stante [1, Proposizione (5.6)].

Per concludere la prova di (a) e (b), nel caso $s = 2$, sarà sufficiente mostrare che

$$f(\overline{v_i'}/\overline{v}) = f(v_i'/v), \quad e(w'/w)e(\overline{v_i'}/\overline{v}) = e(v_i'/v).$$

La prima uguaglianza segue dal Corollario (6.10). Per la seconda, osserviamo che, in virtù del Corollario (6.11), esiste il seguente diagramma esatto e commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(0) & \longrightarrow & \Gamma_{\overline{v}} & \longrightarrow & \Gamma_v & \longrightarrow & \Gamma_w & \longrightarrow & (0) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
(0) & \longrightarrow & \Gamma_{\overline{v_i'}} & \longrightarrow & \Gamma_{v_i'} & \longrightarrow & \Gamma_{w'} & \longrightarrow & (0)
\end{array}$$

quindi, stante il Corollario (2.4) la sequenza

$$(0) \longrightarrow \Gamma_{\overline{v_i'}}/\Gamma_{\overline{v}} \longrightarrow \Gamma_{v_i'}/\Gamma_v \longrightarrow \Gamma_{w'}/\Gamma_w \longrightarrow (0)$$

è esatta. Questo prova la seconda uguaglianza.

A questo punto, supponiamo $s \geq 3$ e che la disuguaglianza valga per collezioni di valutazioni a due a due non equivalenti di cardinalità al più $s - 1$. Distinguiamo due casi.

(1) Supponiamo che $\mathcal{V}' := \{w_1, \ldots, w_s\}$ abbia almeno due valutazioni indipendenti. Allora, la partizione dell'insieme $\mathcal{V}'$ determinata dalla relazione di dipendenza (che è di equivalenza, per il Corollario (5.12)) contiene almeno due insiemi. Quindi, detta $\{\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_r\}$ tale partizione di $\mathcal{V}'$, si ha $\mathrm{Card}(\mathcal{P}_k) < s$, per ogni $k = 1, \ldots, r$. Adesso selezioniamo una valutazione $w_{i(k)} \in \mathcal{P}_k$, $k = 1, \ldots, r$, e siano $\widehat{L}_{i(k)}$ il completamento di L rispetto alla topologia definita da $w_{i(k)}$, $n(k)$ il grado dell'ampliamento $\widehat{L}_{i(k)}/\widehat{K}$ (Teorema (8.7(a2))). Fissiamo adesso $k \in \{1, \ldots, r\}$. Se $w_i \in \mathcal{P}_k$, allora w_i definisce su L la stessa topologia di $w_{i(k)}$, stante la Proposizione (5.11). Dunque, l'estensione continua $\widehat{w}_i$ di w_i al completamento di L con la topologia determinata da w_i è una valutazione di $\widehat{L}_{i(k)}$. Poiché, in particolare, $\widehat{w}_i|_{\widehat{K}}$ è una valutazione di $\widehat{K}$ che estende v, si ha $\widehat{w}_i|_{\widehat{K}} = \widehat{v}$, in virtù del Teorema (4.7(i)). Consideriamo adesso l'estensione finita di campi $\widehat{L}_{i(k)}/\widehat{K}$, e la valutazione $\widehat{v}$ di $\widehat{K}$. Posto $\widehat{\mathcal{P}}_k := \{\widehat{w} : w \in \mathcal{P}_k\}$, fissiamo due valutazioni $\widehat{w}, \widehat{w}' \in \widehat{\mathcal{P}}_k$. Poiché w, w'

sono per ipotesi non equivalenti e $\widehat{w}|_L = w, \widehat{w}'|_L = w'$, tali risultano anche $\widehat{w}, \widehat{w}'$. Poiché $\mathrm{Card}(\widehat{\mathcal{P}}_k) < s$, possiamo applicare l'ipotesi induttiva all'ampliamento di campi finito $\widehat{L}_{i(k)}/\widehat{K}$, e alla collezione $\widehat{\mathcal{P}}_k$ di estensioni a due a due non equivalenti di $\widehat{v}$ a $\widehat{L}_{i(k)}$. Dunque, tenendo presente il Teorema (8.7(a1)), si ha $\sum_{w \in \mathcal{P}_k} e(w/v)f(w/v) \leq n(k)$. Inoltre, per l'arbitrarietà di k e per il Teorema (8.7(b)), si ha

$$\sum_{i=1}^{s} e(w_i/v)f(w_i/v) \leq \sum_{k=1}^{r} n(k) \leq n,$$

tenendo presente che le estensioni $w_{i(1)}, \ldots, w_{i(r)}$ di v a L, essendo state scelte in classi distinte, sono a due a due indipendenti.

(2) Supponiamo, adesso, che le v_i' siano a due a due dipendenti e procediamo come nel caso di due valutazioni dipendenti.

Infine, supponiamo che esistano due indici i, j tali che $A_{v_i'} \supset A_{v_j'}$. L'ultima relazione implica che $\Gamma_{v_i'}/H \cong \Gamma_{v_j'}$, essendo H un sottogruppo isolato di $\Gamma_{v_i'}$ (Lemma (6.12)).

Poiché la composizione canonica

$$\Gamma_v \longrightarrow \Gamma_{v_i'} \longrightarrow \Gamma_{v_i'}/H \cong \Gamma_{v_j'}$$

è iniettiva allora $H \cap \Gamma_v = \{0\}$, quindi per la Proposizione (8.4 (ii)) si ha $H = \{0\}$. Da ciò segue che gli indici i, j sono uguali, essendo le valutazioni v_i' e v_j' equivalenti. □

Perserviamo le notazioni introdotte nel precedente Teorema (8.10). Possiamo adesso descrivere la struttura degli ideali massimali della chiusura integrale di A_v in L.

8.11 Corollario. *Siano L/K un ampliamento di campi, v una valutazione di K, $\mathcal{V}$ un sistema completo di estensioni di v a L, $C := \bigcap_{w \in \mathcal{V}} A_w$. Allora valgono le seguenti asserzioni.*

(i) *C è la chiusura integrale di A_v in L.*

(ii) *Sia $\mathfrak{m}_w$, per ogni $w \in \mathcal{V}$, il massimale di A_w, e sia $\mathfrak{p}_w := C \cap \mathfrak{m}_w$. Se l'ampliamento L/K è finito, allora* $\mathrm{Max}(C) = \{\mathfrak{p}_w : w \in \mathcal{V}\}$ *(e quindi* $\mathrm{Max}(C)$ *è finito). Inoltre, si ha $A_w = C_{\mathfrak{p}_w}$, per ogni $w \in \mathcal{V}$.*

Dimostrazione. ???. Per il Teorema (8.10(a,c)), gli anelli A_w, $w \in \mathcal{V}$, sono incomparabili e in numero finito. La (ii) segue pertanto dalla Proposizione (5.2) e dal Corollario (5.5). $\square$

8.0.1 Indice di ramificazione iniziale

Se Γ è un gruppo abeliano totalmente ordinato, indicheremo con $P(\Gamma)$ l'insieme degli elementi positivi di Γ.

8.12 Definizione. *Siano Γ un gruppo abeliano totalmente ordinato e Δ un sottogruppo di Γ di indice finito. Sia $\mathfrak{T}(\Delta)$ la collezione dei filtri di $P(\Gamma)$ che contengono $P(\Delta)$. Diremo* indice iniziale di Δ in Γ *la cardinalità dell'insieme $\mathfrak{T}(\Delta)$, e indicheremo tale numero cardinale con $\epsilon(\Gamma, \Delta)$.*

Vogliamo mostrare che l'indice di iniziale è un numero naturale.

8.13 Proposizione. *Siano Γ un gruppo abeliano totalmente ordinato e Δ un sottogruppo di Γ di indice finito. Se l'insieme $P(\Gamma)$ non ha minimo, allora $\epsilon(\Gamma, \Delta) = 1$. Altrimenti, se ν è il minimo di $P(\Gamma)$ e Γ' è il sottogruppo di Γ generato da ν, allora $\epsilon(\Gamma, \Delta)$ è l'indice in Γ' di $\Gamma' \cap \Delta$.*

Dimostrazione. Supponiamo che l'insieme $P(\Gamma)$ non abbia minimo. Sarà sufficiente mostrare che l'unico elemento di $\mathfrak{T}(\Gamma)$ è $P(\Gamma)$. Sia dunque F un filtro di $P(\Gamma)$ contenente $P(\Delta)$. Fissiamo un elemento $\alpha \in P(\Gamma)$. Pertanto l'insieme $X_\alpha := \{\beta \in \Gamma : 0 < \beta < \alpha\}$ è infinito. Poiché l'insieme $\{\beta + \Delta : \beta \in X_\alpha\}$ è finito (essendo l'indice in Γ di Δ finito), possiamo scegliere due elemento distinti $\beta_1, \beta_2 \in X_\alpha$ tali che $\beta_1 - \beta_2 = \delta \in \Delta$, e possiamo anche assumere $\beta_1 > \beta_2$. Dunque si ha $0 < \delta < \beta_1 < \alpha$, e quindi $\delta \in X_\alpha$. Essendo F un filtro su $P(\Gamma)$ e $\delta \in P(\Gamma) \subseteq F$, si ha $\alpha \in F$. Questo prova che $F = P(\Gamma)$. Sia adesso ν il minimo di $P(\Gamma)$. Poiché l'insieme $\{n\nu : n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$ è infinito, l'insieme $\{m \in \mathbb{N} \backslash \{0\} : m\nu \in \Delta\}$ è non vuoto (Δ ha indice finito in Γ), e quindi ha minimo n, per il buon ordinamento di $\mathbb{N}$. Ovviamente, n è l'indice di $\Gamma' \cap \Delta$ in Γ'. Posto, per ogni $\alpha \in \Gamma$, $M(\alpha) := \{\gamma \in \Gamma : \gamma \geq \alpha\}$, è facile convincersi che $\{M(\nu), \ldots, M(n\nu)\}$ è una collezione di n filtri distinti di $P(\Gamma)$ contenenti $P(\Delta)$. A questo punto, basta mostrare che $\mathfrak{T}(\Delta) = \{M(\nu), \ldots, M(n\nu)\}$. Sia $F \in \mathfrak{T}(\Delta)$. Poiché $F \supseteq P(\Delta)$, l'insieme $\{m \in \mathbb{N} : m\nu \in F\}$ è non vuoto, in quanto contiene $n\nu$, e ha minimo i, per il buon ordinamento di $\mathbb{N}$. Segue immediatamente che $M(i\nu) \subseteq F$. Supponiamo, per assurdo, che esista un elemento $\gamma \in F$ tale che $\gamma < i\nu$. Poiché F è un filtro e

$(i-1)\nu \notin F$, si ha $(i-1)\nu < \gamma$. Pertanto, dal fatto che $\gamma - (i-1)\nu \in P(\Gamma)$, segue $\gamma - (i-1)\nu \geq \nu$. Quindi $\gamma \geq i\nu$, una contraddizione. Resta così provato che $F = M(i\nu)$. Questo conclude la dimostrazione. □

8.14 Corollario. *Siano* Γ *un gruppo abeliano totalmente ordinato e* Δ *un sottogruppo di* Γ *di indice finito. Allora* $\epsilon(\Gamma, \Delta) \leq (\Gamma : \Delta)$, *e quindi è finito.*

Dimostrazione. Se $P(\Gamma)$ non ha minimo, l'asserto segue immediatamente dalla Proposizione (8.13). Se ν è il minimo di $P(\Gamma)$ e Γ' è il sottogruppo di Γ generato da ν, allora $\epsilon(\Gamma, \Delta) = \mathrm{Card}(\Gamma'/\Gamma' \cap \Delta)$ (Proposizione (8.13). Allora basta osservare che $\Gamma'/\Gamma' \cap \Delta$ è canonicamente immerso in Γ/Δ. □

8.15 Definizione. *Siano* L/K *un ampliamento finito di campi,* w *una valutazione di* L, v *la restrizione di* w *a* K, Γ, Δ *i gruppi dei valori di* w, v *rispettivamente. Si dice indice iniziale di* w *rispetto a* v *l'indice iniziale di* Δ *in* Γ, *e si pone* $\epsilon(w/v) := \epsilon(\Gamma, \Delta)$.

8.16 Osservazione. Siano $L, K, w, v, \Gamma, \Delta$ come nella Definizione (8.15). Poiché l'ampliamento L/K è finito, $\epsilon(w/v)$ è un numero naturale, per il Corollario (8.14) e [1, Proposizione (5.6)].

8.17 Lemma. *Siano* L/K *un ampliamento di campi,* w *una valutazione di* L, v *la sua restrizione a* K, $A \subseteq A'$ *gli anelli di valutazione associati a* v, w, *rispettivamente,* $\mathfrak{m}$ *il massimale di* A. *Allora valgono le seguenti asserzioni.*

(i) *L'estensione* $\mathfrak{m}A'$ *di* $\mathfrak{m}$ *ad* A' *è un ideale proprio.*

(ii) *Il campo residuo* $\kappa(A)$ *di* A *è canonicamente immerso nell'anello* $A'/\mathfrak{m}A'$. *In particolare,* $A'/\mathfrak{m}A'$ *è, in modo naturale, un* $\kappa(A)-$*spazio vettoriale.*

Dimostrazione. (i). Supponiamo, per assurdo che $\mathfrak{m}A' = A'$, ovvero che esistono $a'_1, \ldots, a'_h \in A', m_1, \ldots, m_h \in \mathfrak{m}$ tali che $\sum_{i=1}^{h} a'_i m_i = 1$. Allora si ha immediatamente $w(1) = 0 \geq \min\{w(a'_i) + v(m_i) : i = 1, \ldots, n\}$. Questa è una contraddizione, in quanto $w(a'_i) + v(m_i) > 0$, per ogni i.
(ii). Sia $\lambda : A \longrightarrow A'/\mathfrak{m}A'$ la composizione dell'inclusione di A in A' con la proiezione canonica. Si ha subito $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{Ker}(\lambda)$ e, essendo λ non nullo (per (i)), si ha $\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}(\lambda)$. Dunque λ induce un'immersione di anelli $\kappa(A) \hookrightarrow A'/\mathfrak{m}A'$. Questo conclude la dimostrazione. □

8.18 Lemma. *Siano* A *un anello locale di massimale* $\mathfrak{m}$ *e* X *un* $A-$*modulo semplice. Allora, per ogni* $x \in X\backslash\{0\}$, *si ha* $\mathfrak{m} = \mathrm{Ann}_A(x)$. *In particolare,* X *è, in modo naturale, un* $\kappa(A)-$*spazio vettoriale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in X\backslash\{0\}$. Poiché $\mathrm{Ann}_A(x)$ è un ideale proprio di A, si ha $\mathrm{Ann}_A(x) \subseteq \mathfrak{m}$. Per assurdo, supponiamo che esista un elemento $m \in \mathfrak{m}$ tale che $mx \neq 0$. Allora il sottomodulo di X generato da mx coincide con X, per ipotesi. Dunque, esiste $a \in A$ tale che $x = amx$, ovvero $(1 - am)x = 0$. Osservando che $1-am$ è invertibile in A, si ottiene subito una contraddizione. La seconda parte dell'asserzione è una conseguenza immediata di quanto appena visto. □

8.19 PROPOSIZIONE. *Siano L/K un ampliamento finito di campi, w una valutazione di L, v la restrizione di w a K, $A \subseteq A'$ gli anelli di valutazione associati a v, w, rispettivamente, $\mathfrak{m}$ il massimale di A. Allora*

$$\dim_{\kappa(A)}(A'/\mathfrak{m}A') = \epsilon(w/v)f(w/v).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $\Gamma \supseteq \Delta$ i gruppi dei valori di w, v, rispettivamente. In virtù della Proposizione (6.6), si ha una corrispondenza biunivoca fra gli ideali propri di A' contenenti $\mathfrak{m}A'$ e i filtri di $P(\Gamma)$ contenenti $P(\Delta)$. Dunque, l'insieme degli ideali propri di A' contenenti $\mathfrak{m}A'$ ha cardinalià $\epsilon(w/v)$ e, poiché tali ideali costituiscono un insieme totalmente ordinato dall' inclusione (A' è un anello di valutazione), la lunghezza dell'anello quoziente è $\epsilon(w/v)$. Adesso, osserviamo che un modulo di lunghezza 1 su A' è uno spazio vettoriale di dimensione 1 su $A'/\mathfrak{m}'$ (Lemma 8.18), e quindi un modulo di lunghezza $f(w/v)$ su A. Dal momento che $A'/\mathfrak{m}A'$ è un $A'-$modulo di lunghezza $\epsilon(w/v)$, esso ha lunghezza $\epsilon(w/v)f(w/v)$ su A, dunque su $A/\mathfrak{m}$. Questo conclude la dimostrazione. □

8.20 PROPOSIZIONE. *Siano L/K un ampliamento finito di campi di grado n, v una valutazione su K e $(A, \mathfrak{m})$ l'anello di valutazione di v. Siano, inoltre, $B = \overline{A}^L$ la chiusura integrale di A in L e $\{v'_1, \cdots, v'_s\}$ un sistema completo di valutazioni su L che estendono v. Allora*

$$\dim_{\frac{A}{\mathfrak{m}}}(B/\mathfrak{m}B) = \sum_{i=1}^{s} \epsilon(v'_i/v)f(v'_i/v).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano A'_i gli anelli di valutazione di v'_i $(1 \leq i \leq s)$; in virtù del Corollario (8.11 (i)) si ha $A'_i = B_{\mathfrak{m}'_i}$, dove gli $\mathfrak{m}'_i$ sono tutti e soli i massimali di B. Consideriamo, adesso, gli ideali $\mathfrak{q}'_i$ della Proposizione (2.3); abbiamo visto che la mappa naturale $B/\mathfrak{m}B \longrightarrow \prod_{i=1}^{s} B/\mathfrak{q}'_i$ è un isomorfismo canonico. Osserviamo che, stante la comassimalità degli ideali $\mathfrak{q}'_i$ (Proposizione (2.3)), ognuno di essi è contenuto in un solo massimale $\mathfrak{m}'_i$. Infatti se esistono due indici i, j distinti tali che $\mathfrak{q}'_i \subseteq \mathfrak{m}'_j$ allora, dato che $\mathfrak{q}'_j \subseteq \mathfrak{m}'_j$, si ha $B = \mathfrak{q}'_i + \mathfrak{q}'_j \subseteq \mathfrak{m}'_j$, una contraddizione.

L'ultima asserzione implica che l'anello $B/\mathfrak{q}'_i$ è locale e il suo massimale è $\mathfrak{m}'_i/\mathfrak{q}'_i$. Quindi

$$B/\mathfrak{q}'_i \cong (B/\mathfrak{q}'_i)_{\mathfrak{m}'_i/\mathfrak{q}'_i} \cong B_{\mathfrak{m}'_i}/\mathfrak{q}'_i B_{\mathfrak{m}'_i} = B_{\mathfrak{m}'_i}/\mathfrak{m} B_{\mathfrak{m}'_i}, \quad (\mathfrak{q}'_i B_{\mathfrak{m}'_i} = \mathfrak{m} B_{\mathfrak{m}'_i}).$$

La tesi segue in virtù della Proposizione (8.19) e della relazione $A'_i = B_{\mathfrak{m}'_i}$. □

8.21 COROLLARIO. *Con le stesse notazioni ed ipotesi della proposizione precedente si ha:*

$$\dim_{\frac{A}{\mathfrak{m}}}(B/\mathfrak{m}B) = \sum_{i=1}^{s} \epsilon(v'_i/v) f(v'_i/v) \leq \sum_{i=1}^{s} e(v'_i/v) f(v'_i/v) \leq n.$$

DIMOSTRAZIONE. In virtù della Proposizione (8.13) si ha $\epsilon(v'_i/v) \leq e(v'_i/v)$. Inoltre per il Teorema (8.10) $\sum_{i=1}^{s} e(v'_i/v) f(v'_i/v) \leq n$. □

8.22 TEOREMA. *Siano L/K un ampliamento finito di campi di grado n, v una valutazione su K e A l'anello di valutazione di v, $\mathfrak{m}$ il suo massimale. Siano, inoltre, B la chiusura integrale di A in L e $\{v'_1, \cdots, v'_s\}$ un sistema completo di valutazioni su L che estendono v. Allora le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

(1) *B è un A-modulo finitamente generato;*

(2) *B è un A-modulo libero;*

(3) *$\dim_{\frac{A}{\mathfrak{m}}}(B/\mathfrak{m}B) = n$;*

(4) *$\sum_{i=1}^{s} e(v'_i/v) f(v'_i/v) = n$ e $\epsilon(v'_i/v) = e(v'_i/v)$ per ogni i.*

DIMOSTRAZIONE. (1) ⇒ (2) Segue dal Teorema (6.7).

(2) ⇒ (1) Supponiamo per assurdo che $B = A^{(I)}$, dove $\text{card}(I) > \omega$. Poiché $\mathfrak{m}A^{(I)} = \mathfrak{m}^{(I)}$, allora

$$B/\mathfrak{m}B = A^{(I)}/\mathfrak{m}A^{(I)} = A^{(I)}/\mathfrak{m}^{(I)} \cong (A/\mathfrak{m})^{(I)},$$

una contraddizione.

(2) $\Rightarrow$ (3) Mostriamo che il rango di B come A-modulo è n. Per assurdo esistano r elementi, $(r < n)$, $b_1, \cdots, b_r \in B$ linearmente indipendenti su A che generano B. Adesso, fissato un elemento $l'/l'' \in L$ si ha $l', l'' \in B$ (Corollario (5.3)); quindi, poiché $l' = a_1 b_1 + \cdots a_r b_r$, allora $l'/l'' = a_1(b_1/l'') + \cdots a_r(b_r/l'')$, una contraddizione.

(3) $\Rightarrow$ (2) Siano $x_1, \cdots, x_n$ elementi di B tali che $x_1 + \mathfrak{m}B, \cdots, x_n + \mathfrak{m}B$ formano una base di $B/\mathfrak{m}B$ come $A/\mathfrak{m}$-spazio vettoriale. Sia N l'A-sottomodulo di B generato dagli $x_1, \cdots, x_n$. Stante il Teorema (6.7), N è A-libero. Proviamo, adesso, che $N = B$.

Sia, quindi, $y \in B$ e consideriamo $M = N + Ay$; naturalmente M è un A-modulo libero. L'omomorfismo $N/\mathfrak{m}N \longrightarrow B/\mathfrak{m}B$, $x_i + \mathfrak{m}N \mapsto x_i + \mathfrak{m}B$, è suriettivo; dunque

$$n = \dim_{\frac{A}{\mathfrak{m}}}(B/\mathfrak{m}B) \leq \dim_{\frac{A}{\mathfrak{m}}}(N/\mathfrak{m}N) \leq n.$$

In virtù di quanto detto sopra, gli elementi distinti $x_i + \mathfrak{m}N, \cdots, x_n + \mathfrak{m}N$ formano una base dello spazio vettoriale $N/\mathfrak{m}N$ e, per il lemma di Nakayama, un sistema minimale di generatori dell'$A-$modulo libero N, cioè una base. Pertanto, esistono $a_1, \cdots, a_n \in A$ tali che

$$y + \mathfrak{m}N = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + \mathfrak{m}N,$$

quindi $y - (a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n) \in \mathfrak{m}N$. Questo prova l'asserzione (2).

(3)$\Leftrightarrow$ (4) Segue dal Corollario (8.21). □

8.23 Corollario. *Siano L/K un ampliamento di campi finito e separabile, v una valutazione discreta di K, $\mathcal{V}$ un sistema completo di estensioni di v a L. Allora si ha $\sum_{w \in \mathcal{V}} e(w/v) f(w/v) = [L : K]$.*

Dimostrazione. Siano A l'anello di valutazione associato a v e B la chiusura integrale di A in L. Allora A un dominio Noetheriano (v è discreta) integralmente chiuso. Dunque, a norma del Teorema (2.7), B è un $A-$modulo finitamente generato. Dunque la conclusione segue immediatamente dal Teorema (8.22). □

Riferimenti bibliografici

[1] Teoria delle Valutazioni.

[2] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald, Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley, Reading, 1969.