Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2005/2006
AL2 - Gruppi, Anelli e Campi (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 2

1. Si scrivano i seguenti numeri complessi, i loro coniugati ed i loro inversi in *forma trigonometrica*, ovvero nella forma $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, con $\rho \in \mathbb{R}^+$, e $0 < \theta \leq 2\pi$:
$$5,\ -3i,\ 1+i,\ -\sqrt{3}+i.$$
Determinare inoltre le loro radici terze e quarte.

2. Determinare il gruppo delle radici n-sime dell'unità per $n = 3, 4, 5, 6$.
Verificare che tale gruppo è ciclico e determinare i suoi generatori.

3. Siano:
$U = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| = 1\}$ e $V = \{z \in \mathbb{C}\,;\ \text{esiste } n \geq 1 \text{ tale che } z^n = 1\}$.
Mostrare che U è un gruppo rispetto alla moltiplicazione e che V è un sottogruppo di U.

4. Mostrare che tutti gli elementi di ordine finito di un gruppo commutativo G formano un sottogruppo di G.

5. Sia G un gruppo e siano $h, g \in G$ tali che $hg = gh$. Mostrare che, se h ha ordine finito uguale a n e g ha ordine finito uguale a m, allora hg ha ordine finito uguale a $\mathrm{mcm}(m, n)$.

6. Siano
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Mostrare che A e B hanno ordine 2 in $GL_2(\mathbb{R})$ ma AB ha ordine infinito.
Questo fatto contraddice l'esercizio precedente?

7. Siano A un insieme e $(G, *)$ un gruppo. Indichiamo con $\mathcal{F}(A, G)$ l'insieme di tutte le applicazioni $f : A \longrightarrow G$.
Mostrare che $(\mathcal{F}(A, G), \cdot)$ è un gruppo con la seguente operazione: se $f, g \in \mathcal{F}(A, G)$, allora $f \cdot g : A \longrightarrow G$ è l'applicazione definita da $(f \cdot g)(x) = f(x) * g(x)$.
Mostrare inoltre che, se G è finito, ogni $f \in \mathcal{F}(A, G)$ ha ordine finito.

8. Mostrare che se tutti gli elementi di un gruppo G hanno ordine 2, allora G è commutativo.

9. Determinare tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}_{30}$.

10. Mostrare che il gruppo $U(\mathbb{Z}_{25})$ è ciclico e determinare tutti i suoi sottogruppi.

11. Mostrare che il gruppo $U(\mathbb{Z}_{15})$ ha un sottogruppo non banale che non è ciclico.

12. Sia $S := \{s_i\}$ un sottoinsieme di un gruppo moltiplicativo G e sia $H :=< S >$ l'intersezione di tutti i sottogruppi di G contenenti S, ovvero il sottogruppo di G *generato* da S.

    Mostrare che H è formato da tutti i possibili prodotti finiti del tipo $s_{i_1}^{k_1} s_{i_2}^{k_2} \cdots s_{i_n}^{k_n}$, con $s_{i_j} \in S$ e $k_i \in \mathbb{Z}$.

13. Si considerino le seguenti matrici di $GL_2(\mathbb{C})$

    $$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} ; \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} .$$

    Verificare che valgono le seguenti relazioni:

    $$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \quad ;$$
    $$\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji} \ ; \ \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj} \ ; \ \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik} \, .$$

    Il sottogruppo di $GL_2(\mathbb{C})$ generato da $\mathbf{i} \, , \mathbf{j} \, , \mathbf{k}$ si chiama il *gruppo delle unità dei quaternioni* e si indica con $\mathbf{H}$.

    Verificare che
    $$\mathbf{H} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{i}, -\mathbf{i}, \mathbf{j}, -\mathbf{j}, \mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$$
    ed esplicitare la tabella moltiplicativa di $\mathbf{H}$.

    Verificare inoltre che i sottogruppi di $\mathbf{H}$ sono tutti ciclici e normali.

14. Costruire il sottogruppo di $\mathbf{S}_4$ generato da $\delta = (24)$ e $\rho = (1234)$.

15. Costruire il sottogruppo di $\mathbf{S}_5$ generato da $\delta = (24)$ e $\rho = (12345)$.