Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2005/2006
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Seconda prova di valutazione intermedia
11 Gennaio 2006

*Cognome*_________________ *Nome*_________________

*Numero di matricola*________________________

1. (4 pti) Nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ scomporre l'elemento $18 + 24i$ in fattori irriducibili. Tale fattorizzazione è unica?

2. (4 pti) In $\mathbb{Q}[X]$, trovare il polinomio monico che è massimo comune divisore tra $2X^3 + 2X^2 - 3X + 5$ e $X^2 - X + 2$ e scrivere per esso un'identità di Bézout.

3. (6 pti) Sia $f(X) := 2X^3 + X^2 + 1$ e $A := \frac{\mathbb{Z}_3[X]}{(f(X))}$.

   (a) Mostrare che A ha zerodivisori;

   (b) Mostrare che $\alpha := X^3 + (f(X))$ è invertibile in A e determinare il suo inverso.

4. (10 pti) Sia $\varphi : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Z}_5$ l'applicazione definita da $\varphi(a+bi) = \overline{a}+3\overline{b}$.

   (a) Mostrare che φ è un omomorfismo di anelli suriettivo;

   (b) Determinare un generatore per $Ker\varphi$;

   (c) Elencare gli elementi dell'anello quoziente $\frac{\mathbb{Z}[i]}{Ker\varphi}$.

5. (10 pti) Sia $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$.

   (a) Determinare il polinomio minimo $m(X)$ di α su $\mathbb{Q}$;

   (b) Mostrare che $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}i)$;

   (c) Mostrare che $m(X)$ ha tutte le sue radici in $\mathbb{Q}(\alpha)$.

6. (10 pti) Sia A un dominio a ideali principali e sia $p \in A$ un elemento irriducibile. Mostrare che ogni elemento $a \in A \setminus \{0\}$ si può scrivere come $a = px + b$, dove $x \neq 0$ e $b = 0$ oppure p non divide b.