Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2005/2006
AL2 - Algebra 2 - gruppi, anelli e campi
Prova di Esame - Appello B
22 Giugno 2006

*Cognome*___________________ *Nome*______________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Si considerino, come sottogruppi del gruppo simmetrico S_n, il gruppo alterno delle permutazioni pari A_n ed il gruppo diedrale D_n. Determinare per quali valori di n si ha che $D_n \subseteq A_n$.

   [Suggerimento: si ricordi che il gruppo diedrale è generato da una rotazione (rappresentata da un n-ciclo) e da una simmetria]

2. Determinare tutti gli omomorfismi di gruppi $(\mathbb{Z}_8, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_{10}, +)$.

3. Sia $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Mostrare che:

   (a) Il numero 21 ha (almeno) due fattorizzazioni distinte (a meno di elementi invertibili) in fattori irriducibili in A.

   (b) Determinare un elemento di A che è irriducibile ma non primo.

4. Sia $\phi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}$ l'applicazione che al polinomio $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ associa il numero complesso $f(2 + i\sqrt{3})$.

   (a) Dimostrare che ϕ è un omomorfismo di anelli.

   (b) Determinare il nucleo e l'immagine di ϕ.

   (c) Stabilire se l'immagine di ϕ è un campo.

   (d) Definire esplicitamente l'isomorfismo canonico

$$\frac{\mathbb{Q}[X]}{Ker\phi} \longrightarrow Im\phi.$$