

**Università degli studi di Roma Tre**  
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006**  
**TE1 (Teoria di Galois) - Prof. S. Gabelli**  
**Appello B, 11 Luglio 2006**

1. Determinare la cardinalità del campo di spezzamento di  $f(X) = X^5 - X^2 + 2X - 1$  su  $\mathbb{F}_3$
2. Dimostrare che  $\cos \frac{2\pi}{n}$  e  $\sin \frac{2\pi}{n}$  sono algebrici su  $\mathbb{Q}$  di grado  $\frac{\varphi(n)}{2}$ .
3. Sia  $f(X) = X^4 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ 
  - (a) Trovare il campo di spezzamento  $E$  di  $f$ .
  - (b) Determinare tutti i sottocampi  $E$  di grado 4. Quali sono normali?.
4. Sia  $\alpha = \sqrt[3]{4}$  e  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ 
  - (a) Determinare il grado di  $K$  su  $\mathbb{Q}$ .
  - (b) Esprimere l'inverso di  $\beta = \frac{\alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha + 2}{\alpha^2 + 2\alpha + 1}$  come polinomio di grado al più 2 in  $\alpha$ .