UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamenti
APPELLO A
23 gennaio 2006

*Cognome*__________________ *Nome*____________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **MOTIVANDO** tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti.

I PARTE

1. Stabilire quali tra le proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica e totale sono soddisfatte dalle seguenti relazioni su $\mathbb{Z}$:
   siano $x, y \in \mathbb{Z}$
   (a) $x\sigma_1 y \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y + 1;$
   (b) $x\sigma_2 y \quad \Leftrightarrow \quad xy = 0;$
   (c) $x\sigma_3 y \quad \Leftrightarrow \quad |x - y| \leq 1;$
   (d) $x\sigma_4 y \quad \Leftrightarrow \quad x \mid y.$

2. Si consideri la seguente applicazione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definita da:

$$f(n) = \mathrm{MCD}(n, 77)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(a) Trovare $f(236)$, $f(1980)$ e $f(2387)$.

(b) Trovare $\mathrm{Im}(f)$ e verificare che f non è iniettiva.

(c) Descrivere tutte le classi di equivalenza di $\mathbb{N}$ rispetto alla relazione nucleo di f.

3. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che:

   (a) per ogni $n \geq 1$ si ha :

   $$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}).$$

   (b) se a è un intero *dispari*, allora per ogni $n \geq 1$ si ha che:

   $$a^{2^n} \equiv 1 \mod 2^{n+2}.$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamenti
APPELLO A
23 gennaio 2006

*Cognome*__________________ *Nome*_________________
*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **MOTIVANDO** tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti.

II PARTE

4. Determinare il numero naturale n compreso tra 2000 e 3000 che diviso per 9, 11 e 13 ha come resto rispettivamente 3, 5 e 7.

5. Stabilire se l'operazione binaria $*$ determina una struttura di gruppo sull'insieme dato nei seguenti casi:

   (a) Sia $*$ definita su $\mathbb{Z}$ da:

   $$a * b = a + b + 63.$$

   (b) Sia $*$ definita su $\mathbb{R}$ da:

   $$a * b = a + b - ab.$$

   (c) Sia $X = \{[2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\} \subset \mathbb{Z}_{10}$ e sia $*$ la moltiplicazione mod 10.

6. Decomporre in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}[X]$ e in $\mathbb{Q}[X]$ i seguenti polinomi:

   (a) $f_1(X) = 12X + 3$;
   (b) $f_2(X) = X^3 - X^2 - X - 2$;
   (c) $f_3(X) = 4X^3 - 6X - 1$;
   (d) $f_4(X) = 5X^4 + 18X^3 + 32X^2 - 14X - 2$;
   (e) $f_5(X) = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.