UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamenti
APPELLO X
13 settembre 2006

*Cognome*___________________ *Nome*______________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **MOTIVANDO** tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti.

1. **(2+3 pt)** Utilizzando il principio di induzione si dimostri che :
   (a) per ogni $n > 1$ si ha :
   $$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n};$$
   (b) per ogni $n \geq 1$ si ha che:
   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

2. **(2+3+1+3 pt)** In $X = \{m \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq m \leq 7\}$ si consideri la seguente relazione d'equivalenza ρ:

$$m \rho n \iff m^2 + 2m = n^2 + 2n \text{ (con } m, n \in X).$$

(a) Determinare la partizione di X associata alla relazione ρ.

(b) Sia $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da $\phi(m) = m^2 + 2m - 11$; sia $\equiv_\phi$ la relazione nucleo di ϕ; per ogni $m \in \mathbb{Z}$ descrivere la classe di equivalenza modulo $\equiv_\phi$ di m.

(c) Determinare per quali $m \in \mathbb{Z}$ si ha che $[m]_{\equiv_\phi} = \{m\}$.

(d) **(FAC)** Determinare esplicitamente una biiezione tra $\mathbb{N}$ e l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\equiv_\phi$.

3. **(1+1+1+1+1+1 pt)** Stabilire l'ordine dei seguenti elementi nei rispettivi gruppi:

   (a) $[6]_{20} \in \mathbb{Z}_{20}$;

   (b) $[3]_{20} \in U(\mathbb{Z}_{20})$;

   (c) $9 \in \mathbb{Z}$;

   (d) $-i \in \mathbb{C}$;

   (e) $-i \in \mathbb{C}^\star := \mathbb{C} - \{0\}$;

   (f) $(325) \circ (214) \in S_6$.

4. **(3+3 pt)**Si considerino i seguenti anelli:

   (a) $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$,
   (b) $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$,
   (c) $(\mathbb{Z}[X], +, \cdot)$,
   (d) $(\mathbb{Q}[X], +, \cdot)$,
   (e) $(\mathbb{Z}_{10}[X], +, \cdot)$,
   (f) $(\mathbb{Z}_{13}[X], +, \cdot)$.

   (a) Stabilire quali di essi sono domini d'integrità e quali campi.
   (b) Per ciascuno dei domini D del punto precedente, determinare l'insieme (gruppo) degli elementi invertibili $U(D)$.

5. **(1+2+2+2 pt)** Decomporre in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}[X]$ e in $\mathbb{Q}[X]$ i seguenti polinomi:

(a) $f_1(X) = 15X - 10$;

(b) $f_2(X) = X^8 - 1$;

(c) $f_3(X) = 7X^4 + 18X^3 + 33X^2 - 24X - 6$;

(d) $f_4(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.