Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Esercizi
7 ottobre 2005

1 Insiemi

1. *Proprietà elementari* Se $U \subset X$ dimostrare che
   (a) $U \cap \mathcal{C}_X U = \emptyset$.
   (b) $U \cup \mathcal{C}_X U = X$.

2. Descrivere gli insiemi
   (a) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$.
   (b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})))$.

3. Se $A = \{x \in \mathbb{Z} : x|24\}$ e $B = \{6, -3, 4, -2\}$, determinare $B' = \mathcal{C}_A B$.

4. Dati i due insiemi $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{7, 8\}$ costruire i prodotti cartesiani $A \times B$ e $B \times A$.

2 Funzioni

1. Sia $A = \{a, b, c\}$ un insieme; costruire gli insiemi $\mathcal{P}(E)$ e 2^E e la usuale biezione fra essi.

2. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(n) = n^2$, verificare che f non ha un inverso a destra ed esibire due inverse sinistre.

3. Studiare l'applicazione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(x) = 5x + 1$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$.

4. Consideriamo l'applicazione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ cosi definita: $f(x) = 8x$, per ogni $x \in \mathbb{Z}$, determinare $f^{-1}(17)$, $f^{-1}(24)$, $\mathtt{Im}(f)$ e $f^{-1}(\{-5, 3, 21\})$. Se si considera l'applicazione $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita da $g(x) = 8x$, determinare gli analoghi degli insiemi sopra definiti.

5. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione e $A \subset B \subset X$. In quali casi risulta verificata l'uguaglianza
$$f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A).$$

6. Siano f e g due applicazioni definite rispettivamente da $f(x) = 3x^3$ e $g(x) = x + 4$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Descrivere $(f \circ g)^{-1}$ e verificare che $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

3 Relazioni

1. Quali proprietà verificano le seguenti relazioni:
   (a) $\rho_1 \subset \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ con $\rho_1 = \{(A, B) : A \cap F = B \cap F, F \subset E\}$.
   (b) $\rho_2 \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ con $\rho_2 = \{((m, n), (r, s)) : m + s = n + r\}$.
   (c) $\rho_3 \subset E \times E$, $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $\rho_3 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$.
   (d) $\rho_4 \subset \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, $\rho_4 = \{(x, y) : x|y\}$.

2. Sia $E = \{1, 2, 3\}$ e siano $\rho = \{(x, y) : x \leq y\}$ e $\sigma = \{(x, y) : x + y \neq 3\}$ due relazioni su E. Descrivere esplicitamente ρ, σ, $\rho \circ \sigma$, $\sigma \circ \rho$ le loro inverse e i prodotti delle loro inverse.

3. Nell'insieme $\mathbb{Z}$ si studi la relazione di equivalenza $x \rho y \Leftrightarrow |x| = |y|$ e, nel caso sia di equivalenza, si costruisca $\mathbb{Z}/\rho$

4. Su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si definisca la seguente relazione:

$$(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow a - c, b - d \in \mathbb{Z}.$$

   Dimostrare che ρ è una relazione di equivalenza e determinare l'insieme quoziente $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\rho$.