

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamentali
Tutorato 12 (19 dicembre 2005)
A. Fabbri - G. Fusacchia

1. Stabilire quali dei seguenti polinomi sono irriducibili in $\mathbb{Q}[X]$:

(a) $f(X) = X^3 + 6X^2 - 9X + 3$

(b) $g(X) = X^3 + 2X^2 + 2X + 4$.

2. Sia

$$h(X) = X^4 + 6X^3 + 12X^2 + 12X + 7 \in \mathbb{Z}[X];$$

determinare un numero intero α in modo tale che per $h(X - \alpha)$ si possa applicare il criterio di Eisenstein.

3. Decomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}[X]$:

(a) $f(X) = X^4 - 4X^2 + 2X - 1$

(b) $g(X) = 3X^4 - 7X^3 - 13X^2 + 35X - 10$.

4. Sia $\theta = \frac{2\pi}{5}$.

(a) Verificare che $\cos 2\theta + \cos \frac{\theta}{2} = 0$.

(b) Provare che $\cos \theta$ è una radice del polinomio

$$2(4X^4 - 4X^2 + 1) - X - 1.$$

(c) Decomporre in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}[X]$ il polinomio

$$8X^4 - 8X^2 - X + 1$$

e dedurre che $\cos \theta$ è una radice di un polinomio di secondo grado a coefficienti in \mathbb{Z} .

(d) Determinare $\cos \theta$.

5. Nell'anello $\mathbb{Z}_7[X]$ si considerino i polinomi $f(X) = X^4 + \bar{3}X^3 - \bar{2}X^2 - \bar{2}X + \bar{4}$ e $g(X) = X^2 + \bar{2}X + \bar{4}$.

(a) Decomporre $f(X)$ e $g(X)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}_7[X]$.

(b) Trovare il MCD($f(X)$, $g(X)$).

6. Decomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili:

(a) $f(X) = X^4 + 4$ rispettivamente in $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$;

(b) $g(X) = X^3 - \bar{2}X^2 - \bar{5}X + \bar{2}$ in $\mathbb{Z}_7[X]$;

(c) $h(X) = X^4 + \bar{2}X^3 + \bar{2}X - \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_3[X]$.