Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato 2 (3 ottobre 2005)
A. Fabbri - G. Fusacchia

1. Siano $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{a, b\}$.
   (a) Dare un esempio di corrispondenza da X in Y.
   (b) Stabilire quante sono le corrispondenze da X in Y.
   (c) Dare un esempio di corrispondenza da Y in X.
   (d) Stabilire quante sono le corrispondenze da Y in X.
   (e) Dare un esempio di applicazione da X in Y.
   (f) Stabilire quante sono le applicazioni da X in Y.
   (g) Dare un esempio di applicazione da Y in X.
   (h) Scrivere esplicitamente tutte le applicazioni da Y in X.

2. Nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ si consideri la seguente relazione ρ:
$$n\rho m \iff m = 10 - 2n.$$
   (a) Determinare il grafico R di ρ.
   (b) Determinare la corrispondenza inversa ρ^{-1} ed il suo grafico.

3. Sia ρ una relazione in un insieme X; si considerino le seguenti proposizioni:
   (a) $\mathbf{P_1}$: ρ ha la proprietà riflessiva;
   (b) $\mathbf{P_2}$: ρ ha la proprietà simmetrica;
   (c) $\mathbf{P_3}$: ρ ha la proprietà antisimmetica;
   (d) $\mathbf{P_4}$: ρ ha la proprietà transitiva;
   (e) $\mathbf{P_5}$: ρ ha la proprietà totale.

   Trovare $\neg\mathbf{P_1}$, $\neg\mathbf{P_2}$,$\neg\mathbf{P_3}$,$\neg\mathbf{P_4}$ e $\neg\mathbf{P_5}$.

4. Siano $X = \{1, 2, 3\}$; determinare su X una relazione ρ che goda della proprietà simmetrica, della proprietà transitiva e non goda della proprietà riflessiva. Esiste una relazione ρ soddisfacente alle condizioni precedenti e con almeno 3 elementi nel grafico?

5. Siano $X = \{a, b, c, d, e\}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $X \times Y$ sono grafici di applicazioni:
   (a) $G = \{(b, 2), (c, 2), (d, 7), (e, 8)\}$;
   (b) $G = \{(b, 2), (c, 1), (d, 7), (e, 8), (a, 3), (b, 5)\}$;
   (c) $G = \{(b, 2), (c, 2), (d, 5), (a, 8), (e, 2)\}$;
   (d) $G = \{(b, 2), (c, 8), (d, 7), (e, 1), (a, 4)\}$.

6. Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sono grafici di applicazioni:

   (a) $G = \{(x, y) \mid 2x - 3y = 18\}$;

   (b) $G = \left\{(x, y) \mid 2x^2 - 3y = 18\right\}$;

   (c) $G = \left\{(x, y) \mid 2x - 3y^2 = 18\right\}$;

   (d) $G = \left\{(x, y) \mid 2x^2 - 3y^2 = 18\right\}$.

7. Siano $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definite da:

   (a) $f(x) = 2x - 1, \; g(y) = 3y + 8$;

   (b) $f(x) = 2x - 1, \; g(y) = y^2$;

   (c) $f(x) = x^3, \; g(y) = y^4$.

   Calcolare $g \circ f$ e $f \circ g$.

8. Provare che la composizione di due applicazioni suriettive è suriettiva.

9. Provare che la composizione di due applicazioni iniettive è iniettiva.

10. Sia $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ l'applicazione definita per $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ da $f(x) = \frac{2x-1}{3x-2}$.

    (a) Verificare che f è biiettiva.

    (b) Determinare esplicitamente f^{-1}.

11. Sia $f : X \longrightarrow X$ un'applicazione tale che $f \circ f = id_X$. Verificare che f è biiettiva.

12. Sia X un insieme non vuoto; se A e B sono sottoinsiemi di X, provare che per ogni $x \in X$ si ha che:

    (a) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$;

    (b) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$;

    (c) $\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x)[1 - \chi_B(x)]$.