Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato 4 (17 ottobre 2005)
A. Fabbri - G. Fusacchia

1. Si consideri l'applicazione $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$.
   (a) Determinare $\mathrm{Im}(g)$.
   (b) Descrivere la relazione nucleo di g, $\equiv_g$.
   (c) Determinare $\mathbb{R}/\equiv_g$.

2. In $X = \{m \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq m \leq 5\}$ si consideri la seguente relazione d'equivalenza ρ:
$$m\rho n \quad \Leftrightarrow \quad m^2 + 3m = n^2 + 3n \text{ (con } m, n \in X).$$
   (a) Determinare la partizione di X associata alla relazione ρ.
   (b) Sia $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da $\phi(m) = m^2 + 3m - 7$; sia $\equiv_\phi$ la relazione nucleo di ϕ; per ogni $m \in \mathbb{Z}$ determinare la classe di equivalenza modulo $\equiv_\phi$ di m.

3. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definita da $f((a, b)) = a+2b+1$.
   (a) Trovare $\mathrm{Im}(f)$ e verificare che f non è iniettiva.
   (b) Descrivere le classi d'equivalenza rispetto alla relazione nucleo di f dei seguenti elementi di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(0, 0)$, $(3, 1)$, $(7, 2)$.

4. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che:
   (a) per ogni $n \geq 1$ si ha che $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$;
   (b) per ogni $n \geq 1$ si ha che $1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n + 1)! - 1$;
   (c) per ogni $n \geq 1$ si ha che
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6};$$
   (d) per ogni $n \geq 1$ si ha che
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n + 1)}{2}\right)^2;$$
   (e) per ogni $n \geq 4$ si ha che $n! > n^2$;
   (f) per ogni $n \geq 6$ si ha che $n! > n^3$;
   (g) per ogni $n \geq 1$ si ha che
$$(-1)1 + (-1)^2 2^2 + \cdots + (-1)^n n^2 = (-1)^n \frac{n(n + 1)}{2}.$$

5. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di numeri naturali definita da:
$$a_0 = 2, \; a_1 = 3, \text{ e per ogni } \; n \geq 1 \;\; a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}.$$
   Utilizzando il principio di induzione forte, provare che per ogni $n \geq 0$ si ha che
$$a_n = 2^n + 1.$$