Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato 5 (25 ottobre 2005)
A. Fabbri - G. Fusacchia

1. Provare che il cubo di ogni numero intero può essere scritto come la differenza di due quadrati.

2. Utilizzando l'algoritmo euclideo di divisione stabilire che:

   (a) ogni numero intero dispari è della forma $4k+1$ oppure $4k+3$ con $k \in \mathbb{Z}$;

   (b) il quadrato di ogni numero intero è della forma $3k$ oppure $3k+1$ con $k \in \mathbb{Z}$;

   (c) il cubo di ogni numero intero è della forma $9k$ oppure $9k+1$ oppure $9k+8$ con $k \in \mathbb{Z}$.

3. Siano a, b interi non entrambi nulli. Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

   (a) $a \mid b$;

   (b) $\mathrm{MCD}(a, b) = |a|$;

   (c) $\mathrm{mcm}(a, b) = |b|$.

4. Provare che ogni numero intero della forma $6k+5$ con $k \in \mathbb{Z}$ è anche della forma $3h+2$ con $h \in \mathbb{Z}$, e che il viceversa non è vero.

5. Siano a, b, c interi noni nulli. Provare che:

   (a) Se $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$ e $\mathrm{MCD}(a, c) = 1$, allora $\mathrm{MCD}(a, bc) = 1$.

   (b) $\mathrm{MCD}(ac, bc) = |c|\mathrm{MCD}(a, b)$.

   (c) Se $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$, allora per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha che $\mathrm{MCD}(a^n, b^n) = 1$.

6. Provare che per ogni numero intero n

   (a) $2 \mid n(n+1)$;

   (b) $3 \mid n(n+1)(n+2)$;

   (c) $4 \nmid n^2 + 2$.

7. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha :

   (a) $7 \mid 2^{3n} - 1$;

   (b) $8 \mid 3^{2n} + 7$;

   (c) $3 \mid 2^n + (-1)^{n+1}$;

8. Provare che se n è un numero intero tale che $2 \nmid n$ e $3 \nmid n$, allora $24 \mid (n^2-1)$.