Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato 7 (14 novembre 2005)
A. Fabbri - G. Fusacchia

1. Determinare tutte le eventuali soluzioni delle seguenti congruenze lineari:
   (a) $20X \equiv 0 \pmod{100}$;
   (b) $8X \equiv 24 \pmod{31}$;
   (c) $7X \equiv 18 \pmod{24}$;
   (d) $10X \equiv 24 \pmod{45}$;
   (e) $10X \equiv 325 \pmod{4115}$.

2. Determinare tutte le eventuali soluzioni dei seguenti sistemi di congruenze lineari:
$$\begin{cases} 5X \equiv 7 \pmod{9} \\ 9X \equiv 8 \pmod{13} \\ 11X \equiv 15 \pmod{20} \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2X \equiv 4 \pmod{5}) \\ 10X \equiv 6 \pmod{7} \\ 11X \equiv 14 \pmod{16} \\ 3X \equiv 6 \pmod{9} \end{cases}$$
$$\begin{cases} 10X \equiv 4 \pmod{12} \\ 8X \equiv 9 \pmod{5} \\ 8X \equiv 14 \pmod{49} \end{cases}$$

3. Provare che il sistema di congruenze lineari
$$\begin{cases} X \equiv 5 \pmod{6} \\ X \equiv 7 \pmod{15} \end{cases}$$
non possiede soluzioni.

4. Provare che il sistema di congruenze lineari
$$\begin{cases} X \equiv a \pmod{n} \\ X \equiv b \pmod{m} \end{cases}$$
ammette una soluzione se e solo se $\mathrm{MCD}(n, m) \mid a - b$. Se una soluzione esiste, verificare che essa è unica modulo $\mathrm{mcm}(n, m)$.

5. Trovare il più piccolo intero $a > 2$ tale che
$$2 \mid a, \quad 3 \mid a+1, \quad 4 \mid a+2, \quad 5 \mid a+3, \quad 6 \mid a+4.$$

6. Verificare che l'insieme $\left\{0, 1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^9\right\}$ è un sistema completo di residui modulo 11.

   Stabilire se l'insieme $\left\{0, 1^2, 2^2, 3^2, \cdots, 10^2\right\}$ è un sistema completo di residui modulo 11.

   Stabilire se l'insieme $\left\{3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6\right\}$ è un sistema ridotto di residui modulo 7.