UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2006/2007
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
APPELLO C
3 luglio 2007

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli **giustificando tutte le affermazioni fatte**.

1. Si consideri il gruppo additivo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{\frac{m}{n} + \mathbb{Z} \mid m, n \in \mathbb{Z} \text{ ed } n \neq 0\}$.
   Sia $H = \{\frac{m}{3^k} + \mathbb{Z} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ e } k \in \mathbb{N} \cup 0\}$.
   (a) Provare che H è un sottogruppo di $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
   (b) Determinare l'ordine di $\frac{2}{3^5} + \mathbb{Z}$ e di $\frac{6}{3^7} + \mathbb{Z}$.
   (c) Provare che se $x = \frac{m}{3^k} + \mathbb{Z}$ con k intero positivo e $MCD(3, m) = 1$, allora l'ordine di x è 3^k e $\langle x \rangle = \langle \frac{1}{3^k} + \mathbb{Z} \rangle$.
   (d) Provare che se h è un intero positivo fissato, allora $\langle \frac{1}{3^h} + \mathbb{Z} \rangle$ è isomorfo a $\mathbb{Z}/3^h\mathbb{Z}$.
   (e) Provare che se un elemento $y \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ha ordine una potenza di 3, allora $y \in H$.

2. Si consideri il seguente sottogruppo di $GL_3(\mathbb{Z}_3)$:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}.$$

(a) Trovare il centro di G, $Z(G)$.

(b) Verificare che l'insieme

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$$

è un sottogruppo normale di G.

(c) Cosa si può dire del gruppo quoziente G/N?

(d) Cosa si può dire del gruppo quoziente $G/Z(G)$?

3. (a) Sia D un dominio d'integrità; siano $a, b \in D$.
    i. Provare che $(a) = (b)$ se e solo se a e b sono associati.
    ii. Provare, utilizzando il punto precedente, che se (a) è un ideale primo di D, allora $a = 0$ oppure a è irriducibile.

   (b) Si consideri l'anello prodotto $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
    i. Verificare che l'ideale generato da $(1, 0)$ è un ideale primo di A.
    ii. Verificare che $(1, 0)$ si può scrivere come prodotto di due elementi non invertibili di A. Dire perché questo non contraddice la seconda affermazione del punto (a).

4. (a) Elencare tutti i polinomi irriducibili di secondo grado dell'anello $\mathbb{Z}_2[X]$.

   (b) Sia I l'ideale generato in $\mathbb{Z}_2[X]$ da X^4+X^3+1. Stabilire se l'anello $\mathbb{Z}_2[X]/I$ è un campo oppure no.

   (c) Stabilire se $(X^6 + X^5 + X^4 + X^2 + 1) + I$ è invertibile in $\mathbb{Z}_2[X]/I$ e in caso affermativo, determinarne l'inverso.