Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2006/2007
AL2 - Algebra 2
Esercitazione 3
Martedì 24 Ottobre 2006

1. Siano $(G, +)$ e $(G', +)$ due gruppi abeliani. Sia $Hom(G, G')$ l'insieme degli omomorfismi da G in G'. Si consideri l'applicazione

$$+ : Hom(G, G') \times Hom(G, G') \to Hom(G, G')$$

tale che $(\phi + \psi)(x) := \phi(x) + \psi(x)$.

(a) Dimostrare che $+$ è effettivamente un'operazione binaria.

(b) Dimostrare che $(Hom(G, G'), +)$ è un gruppo abeliano.

Sia $\phi \in Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$. Mostrare che:

(c) l'ordine di $\phi([1]_n)$ divide n e quindi anche il $MCD(m, n)$

(d) $Im(\phi)$ è generato da $\phi([1]_n)$ e che in particolare ϕ è suriettivo se e solo se $\phi([1]_n) \in U(\mathbb{Z}_m)$

(e) se $[a]_m \in \mathbb{Z}_m$ è t.c. $ord([a]_m) \Big| n$ allora $\psi_a : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$, definita come $\psi_a([x]_n) := [ax]_m$, è un omomorfismo.

Si consideri ora l'applicazione $f : (Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m), +) \to (\mathbb{Z}_m, +)$ definita come $f(\phi) := \phi([1]_n)$.

(f) Dimostrare che f è un omomorfismo iniettivo di gruppi.

(g) Trovare l'immagine di f e dire a quale gruppo è isomorfo $Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$.

(h) Trovare tutti gli omomorfismi da $\mathbb{Z}_{18}$ a $\mathbb{Z}_{12}$

(i) Trovare tutti gli omomorfismi da $\mathbb{Z}_6$ a $\mathbb{Z}_{15}$

Sia ora $Aut(\mathbb{Z}_n)$ l'insieme degli automorfismi di $\mathbb{Z}_n$. Mostrare che:

(j) $(Aut(\mathbb{Z}_n), +) \subseteq (Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n), +)$ non è un sottogruppo

(k) $(Aut(\mathbb{Z}_n), \circ)$ è un gruppo

(l) $(Aut(\mathbb{Z}_n), \circ)$ è isomorfo a $(U(\mathbb{Z}_n), \cdot)$.

(m) Trovare tutti gli automorfismi di $\mathbb{Z}_{16}$

Si consideri infine il gruppo degli endomorfismi di $\mathbb{Z}$. Sia $\nu_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la moltiplicazione per a, i.e. $\nu_a(x) = ax$.

(n) Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\nu_a \in Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$

(o) A cosa è isomorfo $Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$?

2. (Es. 2, appello A, a.a. 2003/2004). Sia $(G, \cdot)$ un gruppo. Sia H un suo sottogruppo.

   (a) Provare che se $H \trianglelefteq G$ e $[G : H] = n$ allora $\forall g \in G$, $g^n \in H$.

   (b) Mostrare con un esempio che il risultato del punto precedente è falso se H non è normale in G.

   (c) Provare che A_4 non ha sottogruppi di ordine 6 (sugg.: applicare (a)).

   (a) Dato che $H \trianglelefteq G$ possiamo considerare il gruppo quoziente G/H. Dato che H ha indice n in G, allora $|G/H| = n$. Sia $g \in G$. $gH \in G/H$. G/H ha ordine n, quindi $(gH)^n = H$ in G/H. Perciò $g^n H = H$ in G/H, da cui $g^n \in H$.

   (b) Sia $G = S_3$, $H = \{id, (1,2)\}$. H ha ordine 2 e perciò indice 3 in G, ma $(1,3)^3 = (1,3) \notin H$.

   (c) A_4 ha 12 elementi. Supponiamo, per assurdo, che A_4 abbia un sottogruppo, H, di ordine 6. Allora $[A_4 : H] = 2$ e perciò H è normale. Per il punto (a), allora, $\forall g \in A_4$, $g^2 \in H$. Consideriamo i seguenti sei 3-cicli di A_4: $(1,2,3), (1,3,2), (1,2,4), (1,4,2), (2,3,4), (2,4,3)$. Facciamone i quadrati: $(1,3,2), (1,2,3), (1,4,2)(1,2,4)(2,4,3)(2,3,4)$. Questi ultimi 6 elementi, essendo quadrati, devono appartenere a H. Ma anche $id \in H$, quindi $|H| > 6$, assurdo.

3. (Es. 1, appello B, a.a. 2000/2001). Si consideri il gruppo

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},\ ad \neq 0,\ a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

   sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$.

   (a) Dire quali tra i seguenti sottoinsiemi sono sottogruppi normali di G

      i.
$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G \middle| a = 1 \right\}$$

      ii.
$$K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G \middle| b = 0 \right\}$$

      iii.
$$K_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G \middle| a = d \right\}$$

   (b) Determinare a cosa sono isomorfi i gruppi G/K_i per ogni $0 \leq i \leq 3$ t.c. $K_i \trianglelefteq G$.

4. Sia G gruppo e $Z(G)$ il suo centro. Dimostrare che se $G/Z(G)$ è ciclico allora G è abeliano.

   Siano $x, y \in G$. Consideriamo $G/Z(G)$. Siccome per ipotesi è ciclico, $\exists g \in G$ t.c. $gZ(G)$ genera $G/Z(G)$. Allora $\exists h, k$ t.c. $xZ(G) = g^h Z(G)$ e $yZ(G) = g^k Z(G)$. Quindi $\exists z, z' \in Z(G)$ t.c. $g^{-h}x = z$ e $g^{-k}y = z'$ e cioé

$x = g^h z$ e $y = g^k z'$. Perciò $xy = g^h z g^k z'$. Dato che z, z', per definizione di centro, commutano con ogni elemento di G e che, ovviamente, $g^h g^k = g^{h+k} = g^k g^h$ si ha che $g^h z g^k z' = g^k z' g^h z = yx$.