UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2006/2007
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Seconda prova di valutazione intermedia
10 gennaio 2007

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli **giustificando tutte le affermazioni fatte**.

1. **(1 pt+2 pt+3 pt+1pt+2 pt=9 pt)**

   Sia R un anello commutativo ed unitario. Siano I, J due suoi ideali. Sia $I + J := \{x + y \text{ con } x \in I, y \in J\}$. Sia $\phi : R \to R/I \times R/J$, l'applicazione definita come $\phi(r) := (r + I, r + J)$ per ogni $r \in R$.

   (a) Si dimostri che $I + J$ è un ideale di R.

   (b) Si dimostri che ϕ è un omomorfismo unitario di anelli.

   (c) Si dimostri che ϕ è suriettivo se, e solo se, $I + J = R$.

   (d) Si dimostri che il nucleo di ϕ è $I \cap J$.

   (e) Nel caso $R = \mathbb{Z}$, $I = 5\mathbb{Z}$, $J = 12\mathbb{Z}$, si dimostri che $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

2. **(1 pt+2 pt+3 pt+3 pt=9 pt)**
   Sia R l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$.

   (a) Trovare tutti gli elementi invertibili di R.

   (b) Dimostrare che nessun elemento di R ha norma 2 o 7.

   (c) Dimostrare che $2+\sqrt{-10}, 2-\sqrt{-10}, 2, 7$ sono elementi irriducibili in R e dire se R è un UFD oppure no.

   (d) Trovare (a meno di associati) i divisori comuni di $a = 7(2+\sqrt{-10})$ e $b = 14$ e, se esiste, calcolare un $MCD(a, b)$.

3. **(1 pt+3 pt+4 pt=8 pt)**

Siano $f_a(X) = aX^3 + X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$ ed $I_a = (f_a(X))$.

(a) Determinare per quali valori di a in $\mathbb{Z}_3$ l'anello quoziente $R_a = \mathbb{Z}_3[X]/I_a$ è un campo.

(b) Stabilire se $(2 + X) + I_0$ è invertibile in R_0 e calcolarne l'eventuale inverso.

(c) Studiare il gruppo $(R_0, +)$ e, nel caso risulti un gruppo, $(R_0 - \{0\}, \cdot)$.

4. **(1 pt+5 pt=6 pt)**

Si consideri il polinomio $f(X) = X^3 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Verificare che $f(X)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$.

(b) Sia θ una radice reale di $f(X)$ (dire perché esiste); si consideri l'estensione $\mathbb{Q}(\theta)$ di $\mathbb{Q}$; esprimere ciascuno dei seguenti elementi attraverso la base $\{1, \theta, \theta^2\}$:

$$\theta^4;\ \theta^5;\ 3\theta^5 - \theta^4 + 2;\ \ (\theta^2 + 2\theta + 2)^{-1}.$$