AL2 Algebra 2, gruppi, anelli e campi
A.A. 2006/2007
Prof. Florida Girolami

1. Gruppi

Operazioni binarie e loro proprietà. Elementi neutri e invertibili. Semigruppi e monoidi. Unicità dell'elemento neutro e dell'inverso di un elemento. Gruppi. Esempi. Notazione moltiplicativa ed additiva. Potenze di un elemento. Ordine di un elemento. Sottogruppi. Il gruppo di Klein. Il sottogruppo ciclico generato da un elemento. Gruppi ciclici. Esempi. Sottogruppi di un gruppo ciclico. I sottogruppi di Z. Generatori di un gruppo ciclico. Sottogruppi generati da un sottoinsieme. Centro di un gruppo. Gruppi di trasformazioni. Richiami sul gruppo delle permutazioni S_n. Classi coniugate di S_n. Gruppi diedrali: definizione; esempi: D_3, D_4; loro proprietà. Il gruppo delle unità dei quaternioni.

Classi laterali destre: definizione, proprietà ed esempi. Teorema di Lagrange. Applicazioni del teorema di Lagrange. Classi laterali sinistre. Indice di un sottogruppo. Omomorfismi tra gruppi. Nucleo ed immagine di un omomorfismo. Teorema di Cayley.

Relazioni d'equivalenza associate ad un sottogruppo: ρ_d e ρ_s. Relazioni compatibili e sottogruppi normali. Gruppo quoziente. Esempi. Teorema fondamentale d'omomorfismo per i gruppi. Esempi.

Struttura dei gruppi ciclici. Immagini e controimmagini di sottogruppi e di sottogruppi normali rispetto a un omomorfismo. Immagine di un sottogruppo rispetto ad una proiezione canonica. Intersezione e somma di sottogruppi di Z. Controimmagine di un sottogruppo rispetto ad una proiezione canonica. Primo teorema di isomorfismo tra gruppi. Corrispondenza biunivoca tra i sottogruppi di G/N ed i sottogruppi di G contenenti N. Secondo teorema di isomorfismo tra gruppi. Esempi. $\mathrm{Aut}(G)$ e $\mathcal{I}(G)$. $G/Z(G) \simeq \mathcal{I}(G)$. $\mathcal{I}(G)$ è un sottogruppo normale di $\mathrm{Aut}(G)$.

Gruppi di omomorfismi di gruppi abeliani. $\mathrm{Hom}(Z_n, Z_m) \cong Z_d$ con $d = \mathrm{MCD}(n, m)$. $\mathrm{Aut}(Z_n) \cong U(Z_n)$. $\mathrm{Hom}(Z, Z) \cong Z$.

Azione di un gruppo su un insieme. Esempi di azioni; coniugio. Orbite; stabilizzatore e centralizzante. Equazione delle classi. Un gruppo di ordine p^n con p primo ha centro non banale. Un gruppo di ordine p^2 con p primo è abeliano. Teorema di Cauchy.

p- gruppi. Esempi. Prodotti diretti; prodotti diretti interni; esempi. $Z_n \times Z_m$ è ciclico se e solo se n e m sono primi tra loro. Un gruppo di ordine p^2 con p primo è ciclico oppure è un prodotto diretto di due gruppi ciclici. Rappresentazione dei sottogruppi di un gruppo tramite diagrammi di Hasse. Esempi. Classificazione di gruppi di ordine "piccolo".

2. Anelli

Anelli; anelli unitari, anelli commutativi; elementi invertibili e zerodivisori di un anello. Domini di integrità, corpi, campi. Anelli di matrici. Anelli di funzioni. L'anello $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cup)$. Caratteristica di un anello unitario e di un dominio d'integrità. Anelli di serie formali (cenni) e anelli di polinomi. Sottoanelli. Esempi. L'anello $B[a]$ con B sottoanello di un anello commutativo unitario A ed $a \in A$. L'anello degli interi di Gauss $Z[i]$. Il corpo dei quaternioni di Hamilton: coniugato e norma di un quaternione. L'anello dei quaternioni $H(\ Z)$ e il suo gruppo delle unità. Omomorfismi d'anelli. Il nucleo di un omomorfismo di anelli.

Ideali (destri, sinistri, bilateri). Intersezione, somma e prodotto di ideali. Ideali generati da sottoinsiemi. Ideali principali. Esempi. Ideali bilaterali e relazioni d'equivalenza compatibili. Anello quoziente. Esempi. Teorema fondamentale di omomorfismo. Primo e secondo teorema di isomorfismo per anelli. Teorema di corrispondenza tra gli ideali di A/I e gli ideali di A che contengono I. Ideali massimali ed ideali primi. Caratterizzazioni attraverso l'anello quoziente per anelli commutativi unitari. Ideali di un campo. Esistenza di ideali massimali.

Il campo $Q[\sqrt{d}]$ e il dominio $Z[\sqrt{d}]$; coniugato e norma di un elemento di $Q[\sqrt{d}]$; loro proprietà; elementi invertibili di $Z[\sqrt{d}]$.

Elementi associati in un anello. Elementi primi ed irriducibili in un dominio di integrità; loro caratterizzazione attraverso gli ideali . Esempi di elementi irriducibili e non primi . Domini ad ideali principali (PID). In un PID un elemento irriducibile è primo. Elementi con norma un numero primo sono irriducibili in $Z[\sqrt{d}]$.

Domini euclidei. Esempi di domini euclidei: Z, $K[X]$ con K campo, $Z[\sqrt{d}]$, con $d = -2, -1 - 2, 3$.

Un dominio euclideo è ad ideali principali. MCD e mcm in un dominio di integrità. Domini di Bézout. Domini a MCD.

Domini a fattorizzazione unica (UFD); loro caratterizzazione. Esempi. In un UFD esiste MCD e mcm ed un elemento irriducibile primo. Ogni PID un UFD. Lemma di Gauss. Anelli di polinomi a coefficienti in un UFD.

3. Campi

Caratteristica di un campo. Sottocampo fondamentale. Esempi.

Estensioni semplici algebriche e trascendenti.

Teorema di Kronecker (per ogni polinomio a coefficienti in un campo esiste una estensione di tale campo nella quale il polinomio ammette radici). Esempi.

Campo di spezzamento di un polinomio: teorema di esistenza e unicità (cenni). Esempi di costruzione del campo di spezzamento.

Campi finiti.

Testi consigliati

[1] G. M. Piacentini Cattaneo, *Algebra, un approccio algoritmico*. Decibel-Zanichelli, (1991).
[2] R. B. J. T. Allenby, *Rings, Fields and Groups* . Edward Arnold, (1991).
[3] M. Fontana - S. Gabelli, *Esercizi di Algebra* . Aracne, (1993).
[4] S. Gabelli - F. Girolami, Anelli di Polinomi, Dispense.

Bibliografia supplementare

[5] M. Artin, *Algebra*. Prentice-Hall, (1991).
[6] I. N. Herstein, *Algebra*. Editori Riuniti, (2003).

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		■ SI	□ NO
- esame finale	scritto	■ SI	□ NO
	orale	■ SI	□ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		□ SI	■ NO

L'esame finale consiste di una prova scritta e di un colloquio orale.

Sono previste due prove di valutazione intermedia (esoneri); gli studenti che abbiano conseguito la sufficenza in entrambe queste prove sono esonerati dal sostenere la prova di esame scritta purché accedano alla prova orale negli appelli della prima sessione utile (appelli A e B).

Soltanto in occasione della prova scritta dell'appello A si può recuperare uno dei due esoneri.