UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2006/2007
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Prima prova di valutazione intermedia
9 novembre 2006

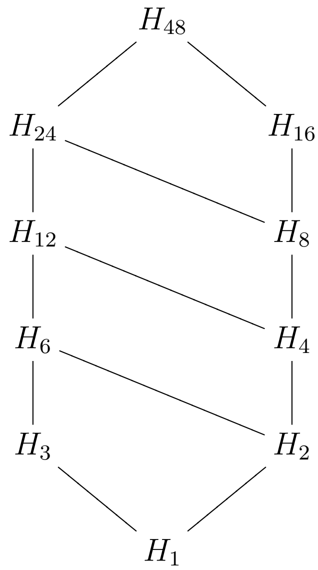
*Cognome*__________________ *Nome*______________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli **giustificando tutte le affermazioni fatte**.

1. **(1 pt+2 pt+2 pt+2 pt=7 pt)**
   (a) Dire quanti sono i generatori di $\mathbb{Z}_{36}$.
   (b) Descrivere i sottogruppi di $\mathbb{Z}_{48}$ e rappresentarli attraverso un diagramma di Hasse.
   (c) Determinare la struttura di $Aut(\mathbb{Z}_{12})$.
   (d) Dire quanti sono gli omomorfismi suriettivi da $\mathbb{Z}_{60}$ a $\mathbb{Z}_{15}$ e descriverne esplicitamente uno.

   (a) Per quanto visto a lezione, i generatori di $\mathbb{Z}_{36}$ sono $\phi(36)$ (dove ϕ è l'indicatore di Eulero). $\phi(36) = \phi(4 \cdot 9) = \phi(4)\phi(9) = (4 - 2)(9 - 3) = 12$.
   (b) Ogni sottogruppo di $\mathbb{Z}_{48}$ ha cardinalità che divide 48 (teorema di Lagrange) e, essendo $\mathbb{Z}_{48}$ ciclico, vale anche il viceversa: per ogni $d \in \mathbb{N}$ t.c. $d|48$ esiste un unico sottogruppo H_d di $\mathbb{Z}_{48}$ di cardinalità d, $H_d := \langle [48/d]_{48} \rangle \cong \mathbb{Z}_d$. Perciò i sottogruppi di $\mathbb{Z}_{48}$ sono in corrispondenza biunivoca con i divisori positivi di 48 e ovviamente (anche gli H_d sono ciclici!) $H_{d_1} \subseteq H_{d_2} \Leftrightarrow d_1|d_2$. I divisori positivi di 48 sono $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48$. In base a quanto detto, il diagramma di Hasse è il seguente:



(c) E' noto che, in generale, $(Aut(\mathbb{Z}_n), \circ) \cong (U(Z_n), \cdot)$.
Quindi $Aut(\mathbb{Z}_{12}) \cong U(\mathbb{Z}_{12})$. $U(\mathbb{Z}_{12})$ ha $\phi(12) = \phi(4)\phi(3) = 4$ elementi. Perciò $U(\mathbb{Z}_{12})$ è isomorfo o a $\mathbb{Z}_4$ oppure a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. $U(\mathbb{Z}_{12}) = \{[1]_{12}, [5]_{12}, [7]_{12}, [11]_{12}\}$ e $[5]_{12}^2 = [1]_{12}, [7]_{12}^2 = [1]_{12}, [11]_{12}^2 = [1]_{12}$. Siccome ogni elemento non banale di $U(\mathbb{Z}_{12})$ ha ordine 2 allora $U(\mathbb{Z}_{12}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(d) Per quanto visto durante il lavoro guidato, gli omomorfismi ϕ_k da $\mathbb{Z}_{60}$ a $\mathbb{Z}_{15}$ sono tutti e soli del tipo $\phi_k([x]_{60}) = [(15/d)xk]_{15}$ con $d := MCD(15, 60) = 15$ e $0 \leq k \leq d-1$. Siccome $\mathrm{Im}(\phi_k) = \langle \phi_k([1]_{60}) \rangle$ ϕ_k è suriettivo se, e solo se, $\phi_k([1]_{60}) = [k]_{15}$ è un generatore di $\mathbb{Z}_{15}$ cioè se, e solo se, $MCD(k, 15) = 1$. Quindi gli omomorfismi suriettivi tra $\mathbb{Z}_{60}$ e $\mathbb{Z}_{15}$ sono $\phi(15) = \phi(3)\phi(5) = 8$. Un esempio si ha ponendo $k = 1$ e considerando ϕ_1: esplicitamente $\phi_1([x]_{60}) = [x]_{15}$.

2. **(2 pt+4 pt+2 pt+1 pt=9 pt)**

Si consideri il seguente sottogruppo del gruppo $GL_3(\mathbb{Z})$:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad | \quad a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sia

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad | \quad b \in 51\mathbb{Z} \right\}.$$

(a) Verificare che H è un sottogruppo normale di G.

(b) Determinare a quale gruppo noto è isomorfo il quoziente G/H.

(c) Siano G_1, G_2, H_1, H_2 gruppi e $\phi : G_1 \to G_2$, $\psi : H_1 \to H_2$ due isomorfismi. Determinare una corrispondenza biunivoca tra $Hom(G_1, H_1)$ e $Hom(G_2, H_2)$.

(d) Dire quanti sono gli omomorfismi da G/H a $\mathbb{Z}_{36}$.

(a) Per ogni $g, g' \in G$, $g = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $g' = \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si ha $gg' = \begin{pmatrix} 1 & x+x' & y+y' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = g'g$, quindi G è un gruppo abeliano.

Per ogni $h, h' \in H$, $h = \begin{pmatrix} 1 & w & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $h' = \begin{pmatrix} 1 & w' & z' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si ha $h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -w & -z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ (se $51|z$ allora $51|(-z)$) e $hh' = \begin{pmatrix} 1 & w+w' & z+z' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ (se $51|z$ e $51|z'$ allora $51|(z+z')$).

Quindi H è un sottogruppo. Dato che G è abeliano H è normale.

(b) Si consideri l'applicazione $\phi : G \to \mathbb{Z}_{51}$ t.c. per ogni $g \in G$, $\phi(g) = [g_{1,3}]_{51}$. ϕ è un omomorfismo, infatti, per quanto visto, per ogni $g, g' \in G$ $(gg')_{1,3} = g_{1,3} + g'_{1,3}$ e quindi $\phi(gg') = [(gg')_{1,3}]_{51} =$

$[g_{1,3} + g'_{1,3}]_{51} = [g_{1,3}]_{51} + [g'_{1,3}]_{51} = \phi(g) + \phi(g')$. Sia ora $[x]_{51} \in \mathbb{Z}_{51}$ e sia $g := \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Chiaramente $\phi(g) = [x]_{51}$ e perciò ϕ è suriettivo.

Inoltre $\ker(\phi) = \{g \in G \; t.c. \; 51 | g_{1,3}\} = H$.

Per il teorema fondamentale di omomorfismo tra gruppi $G/H \cong \mathbb{Z}_{51}$.

(c) Sia $\nu : Hom(G_2, H_2) \to Hom(G_1, H_1)$ così definita: per ogni $\eta \in Hom(G_2, H_2)$, $\nu(\eta) := \psi^{-1} \circ \eta \circ \phi$. ν è ben definita, in quanto la composizione di omomorfismi è un omomorfismo. Inoltre ν è iniettiva: se $\psi^{-1} \circ \eta \circ \phi = \psi^{-1} \circ \eta' \circ \phi$ allora, cancellando a destra (ϕ è in particolare un'applicazione suriettiva) e a sinistra (ψ^{-1} è in particolare un'applicazione iniettiva), si ha $\eta = \eta'$. Inoltre se $\lambda \in Hom(G_1, H_1)$ allora $\mu := \psi \circ \lambda \circ \phi^{-1} \in Hom(G_2, H_2)$ è t.c. $\nu(\mu) = \lambda$, quindi ν è anche suriettiva.

(d) Per i punti precedenti sappiamo che la card. di $Hom(G/H, \mathbb{Z}_{36})$ è uguale alla card. di $Hom(\mathbb{Z}_{51}, \mathbb{Z}_{36})$. Per quanto visto a lezione gli omomorfismi da $\mathbb{Z}_{51}$ a $\mathbb{Z}_{36}$ sono $MCD(51, 36) = 3$.

3. **(1 pt+1 pt+2 pt+4 pt=8 pt)**

Sia G un gruppo.

(a) Provare che per ogni elemento a di G si ha che l'ordine di a è uguale all'ordine di a^{-1}.

(b) Provare che se $a, b \in G$, allora a e bab^{-1} hanno lo stesso ordine.

(c) Provare che se $a, b \in G$, allora ab e ba hanno lo stesso ordine.

(d) Provare che se G ha un solo elemento a di ordine n con $n > 1$, allora $a \in Z(G)$ ed $n = 2$.

(a) E' noto che $ord(a) = |\langle a \rangle|$. Dato che, per definizione di sgr. generato, $\langle a \rangle = \langle a^{-1} \rangle$, allora $ord(a) = ord(a^{-1})$.

(b) E' noto che gli isomofismi conservano gli ordini degli elementi. Si consideri su G l'automorfismo interno ϕ definito, per ogni $g \in G$, come $\phi(g) = bgb^{-1}$. Allora a e $\phi(a) = bab^{-1}$ hanno lo stesso ordine.

(c) $ba = a^{-1}(ab)a$, perciò ab e ba sono coniugati e quindi hanno lo stesso ordine per il punto precedente.

(d) Per ogni $b \in G$ abbiamo visto che a e bab^{-1} hanno lo stesso ordine. Per ipotesi, quindi, per ogni $b \in G$, $bab^{-1} = a$ cioé $ba = ab$ cioè $a \in Z(G)$. Inoltre $ord(a) = ord(a^{-1})$ perciò, per ipotesi, $a = a^{-1}$. Quindi $a^2 = e$. Siccome $a \neq e$ $(n > 1)$ segue che $ord(a) = 2$.

4. **(1 pt+1 pt+2 pt+2 pt=6 pt)**

Sia G un gruppo *abeliano*.

(a) Provare che gli elementi di ordine finito di G formano un sottogruppo di G che è detto *il sottogruppo di torsione* di G.

(b) Trovare il sottogruppo di torsione del gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^*$ dei numeri reali non nulli.

(c) Trovare il sottogruppo di torsione del gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^*$ dei numeri complessi non nulli.

(d) Trovare il sottogruppo di torsione del gruppo $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}$.

Sia $T(G)$ l'insieme degli elementi di G di ordine finito.

(a) Siano $g, g' \in T(G)$. Se $ord(g) < +\infty$ allora anche $ord(g^{-1}) = ord(g) < +\infty$ per l'esercizio precedente. Inoltre, per l'abelianità di G, $(gg')^{ord(g)ord(g')} = g^{(ord(g)ord(g'))} g'^{(ord(g)ord(g'))} = e \cdot e = e$. Quindi $ord(gg') | ord(g)ord(g') \Rightarrow gg' \in T(G)$. Perciò $T(G)$ è un sottogruppo di G.

(b) Sia $x \in \mathbb{R}^*$. Sia $n \in \mathbb{N}^{>0}$. Se n è pari $x^n = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Se n è dispari $x^n = 1 \Rightarrow x = -1$. Quindi $T(\mathbb{R}^*) = \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2$.

(c) Sia $z \in \mathbb{C}^*$. Sia $n \in \mathbb{N}^{>0}$. $z^n = 1 \Leftrightarrow z \in C_n$, dove C_n è il gruppo delle radici n-esime dell'unità. Quindi $T(\mathbb{C}^*) = \cup_{n \geq 1} C_n$.

(d) Ovviamente, essendo $\mathbb{Z}_{12}$ un gruppo finito, $\mathbb{Z}_{12} \times \{0\} \leq T(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z})$. Sia ora $([a]_{12}, b) \in T(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z})$. Per definizione di sottogruppo di torsione esiste $n \in \mathbb{N}^{>0}$ t.c. $n([a]_{12}, b) = ([0]_{12}, 0)$, cioè, in particolare, $nb = 0$, che implica $(n \neq 0)$ $b = 0$. Quindi $T(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}) \leq \mathbb{Z}_{12} \times \{0\}$ e perciò $T(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{12} \times \{0\}$.