Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2006/2007
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Tutorato 4 (23 novembre 2006)
Stefano Urbinati

1. Si considerino i seguenti sottoinsiemi del campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$:
   (a) $A = \{\frac{m}{2n+1} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$;
   (b) $B = \{\frac{m}{11n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\}$;
   (c) $C = \{\frac{2m+1}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\}$;
   (d) $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid 3x \in \mathbb{Z}\}$;
   (e) $G = \{x \in \mathbb{Q} \mid 3^n x \in \mathbb{Z} \text{ per qualche } n \geq 0\}$;
      i. Stabilire quali di essi sono sottoanelli di $\mathbb{Q}$.
      ii. Determinare gli elementi invertibili per quelli di essi che risultano sottoanelli.

2. Sia A un anello commutativo unitario ed n un intero positivo. Provare per induzione su n che:
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

3. Sia A un anello commutativo unitario di caratteristica p con p numero primo. Provare che se $a, b \in A$, allora
$$(a \pm b)^{p^n} = a^{p^n} \pm b^{p^n}.$$
(Sugg. : ricordare che se p è un numero primo e $1 \leqslant k \leqslant p^n - 1$, allora $\binom{p^n}{k}$ è divisibile per p.)

4. Sia A un anello ed $a \in A$; a si dice
   - *idempotente* se $a^2 = a$;
   - *nilpotente* se esiste $n > 0$ tale che $a^n = 0$.

   (a) Provare che se a è nilpotente e $a \neq 0$, allora a è uno zero-divisore.
   (b) Provare che se A è unitario ed a è idempotente con $a \neq 0$ e $a \neq 1$, allora a è uno zero-divisore.
   (c) Dare l'esempio di un elemento $\neq 0$ nilpotente e non idempotente.

(d) Dare l'esempio di un elemento $\neq 0$ e $\neq 1$ idempotente e non nilpotente.

(e) Trovare gli elementi nilpotenti e gli elementi idempotenti in un dominio d'integrità unitario.

(f) Provare che se A è un anello commutativo unitario, a un elemento invertibile di A e b nilpotente in A, allora $a+b$ è invertibile. (Sugg.: $b^n = 0$ per qualche $n > 0$; $a^{-1}(a+b) = 1 + a^{-1}b$; sia $c = -a^{-1}b$; allora $1 - c^n = (1-c)(\cdots)$.)

(g) Trovare gli elementi idempotenti e gli elementi nilpotenti di $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_{12}$ e di $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{12}$.

(h) Sia $m \geq 2$ e $m = p_1^{r_1} \cdots p_l^{r_l}$ la sua fattorizzazione in numeri primi. Mostrare che $[a]_m \in \mathbb{Z}_m$ è nilpotente se e soltanto se $p_1 \cdots p_l$ divide a.

(i) Dimostrare che l'anello $\mathbb{Z}_m$ non ha elementi nilpotenti diversi da zero se e solo se m è privo di fattori quadratici (cioè m non è divisibile per il quadrato di alcun intero $\neq 1$.

5. Provare che in un anello A le seguenti condizioni sono equivalenti:

   (a) A non ha elementi nilpotenti diversi da zero;

   (b) Se $a \in A$ e $a^2 = 0$, allora $a = 0$.

6. Siano $R = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ e $R' = \left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$.

   (a) Verificare che R e R' sono anelli commutativi ed unitari.

   (b) Stabilire se R ed R' sono anelli isomorfi.

7. Sia $A = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}$.

   (a) Provare che A è un anello non commutativo.

   (b) Sia $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\right) = a$. Provare che φ è un omomorfismo e determinarne il nucleo.

8. Stabilire quali delle seguenti applicazioni sono omomorfismi anulari unitari:

   (a) $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da $\varphi(n) = -n$;

   (b) $\psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $\psi(a + ib) = a$;

   (c) $\phi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{Q}[X]$ definita da

   $$\phi(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) = a_0 + a_1(X+2) + \cdots + a_n(X+2)^n;$$

(d) $\chi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{Q}[X]$ definita da

$$\chi(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) = a_0 + a_1X^2 + \cdots + a_nX^{2n}.$$

9. Dare una condizione necessaria e sufficiente perché esista un omomorfismo anulare *unitario* da $\mathbb{Z}_n$ a $\mathbb{Z}_m$.

10. Trovare tutti gli omomorfismi anulari unitari di $\mathbb{Z}$ in se stesso.

11. Sia A un anello commutativo unitario; siano $f : \mathbb{Q} \longrightarrow A$ e $g : \mathbb{Q} \longrightarrow A$ omomorfismi anulari unitari tali che f e g ristrette a$\mathbb{Z}$ coincidono ; provare che $f = g$.

12. Trovare tutti gli omomorfismi anulari unitari di $\mathbb{Q}$ in se stesso.

13. In $\mathbb{Z}$ si considerino gli ideali $I = 51\mathbb{Z}$ e $J = 300\mathbb{Z}$; trovare gli ideali $I + J$, $I \cap J$ e IJ e confrontarli rispetto all'inclusione.

14. In $\mathbb{Z}[X]$ si considerino gli ideali $I = (2, X)$ e $J = (3, X)$. Dimostrare che $H = \{ab \quad | \quad a \in I,\, b \in J\}$ non è un ideale di $\mathbb{Z}[X]$.

    (Sugg. : $X^2 \in H$, $6 \in H$, $X^2 + 6$ non appartiene a H.)