Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2006/2007
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Tutorato 6 (21 dicembre 2006)
Stefano Urbinati

1. Provare che i seguenti numeri complessi α sono algebrici su $\mathbb{Q}$ trovando un polinomio non nullo $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tale che $f(\alpha) = 0$:

$$1 + \sqrt{2};\quad \sqrt{2} + \sqrt{3};\quad 1 + i;\quad \sqrt{1 + \sqrt[3]{2}}.$$

2. Stabilire se i seguenti numeri complessi α sono algebrici o trascendenti sopra l'assegnato campo F; per gli elementi algebrici trovati determinare il polinomio minimo su F:
   (a) $\alpha = 1 + i, \quad F = \mathbb{Q};$ $\qquad \alpha = \sqrt{2} + i, \quad F = \mathbb{Q};$
   (b) $\alpha = \sqrt{\pi}, \quad F = \mathbb{Q};$ $\qquad \alpha = \sqrt{\pi}, \quad F = \mathbb{Q}(\pi);$
   (c) $\alpha = \pi^2, \quad F = \mathbb{Q}(\pi);$ $\qquad \alpha = \pi^2, \quad F = \mathbb{Q}(\pi^3).$

3. Sia il campo K una estensione del campo F. Provare che se $a \in K$ è algebrico di grado dispari su F, allora anche a^2 è algebrico di grado dispari e $F(a) = F(a^2)$.

4. Provare che $\mathbb{Q}(i)$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sono isomorfi come $\mathbb{Q}$-spazi vettoriali ma non come campi.

5. Sia il campo K una estensione del campo F e sia $c \in F$. Provare che se $X^n - c \in F[X]$ è irriducibile in $F[X]$ ed $a \in K$ è una radice di $X^n - c$, allora per ogni intero positivo m che divide n il grado di a^m su F è $\frac{n}{m}$. Qual è il polinomio minimo di a^m su F?

6. Siano $F = \mathbb{Q}$, $E_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $E_2 = E_1(\sqrt{1 + \sqrt{2}})$. Trovare il polinomio minimo di $\sqrt{1 + \sqrt{2}})$ su F. E' E_2 il suo campo di spezzamento?

7. Sia il campo K una estensione algebrica del campo F; provare che se D è un dominio d'integrità tale che $F \subseteq D \subseteq K$, allora D è un campo.

8. Si consideri il polinomio $f(X) = X^3 - 6X^2 + 9X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$.
   (a) Provare che $f(X)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) Sia u una radice reale di $f(X)$ (dire perché esiste); si consideri l'estensione $\mathbb{Q}(u)$ di $\mathbb{Q}$; esprimere ciascuno dei seguenti elementi attraverso la base $\{1, u, u^2\}$:

$$u^4;\ u^5;\ 3u^5 - u^4 + 2;\ (u + 1)^{-1};\ (u^2 - 6u + 8)^{-1}.$$

9. Provare che nessuno campo finito F è algebricamente chiuso.

   (Sugg.: Se $F = \{a_0, \cdots, a_n\}$ si consideri il polinomio $a_1 + (X - a_0)(X - a_1) \cdots (X - a_n) \in F[X]$, dove $a_1 \neq 0$.)