Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
TN1 - Introduzione alla teoria dei numeri
Appello X??
17 settembre 2009

*Cognome*__________________ *Nome*______________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Un numero naturale $n > 1$ si dice <u>perfetto</u> se $\sigma(n) = 2n$, con

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Provare che:

(a) Se $2^s - 1$ con $s \in \mathbb{Z}$, $s > 1$ è primo, allora s è primo (un numero primo di questa forma si dice primo di Mersenne).

(b) Se $2^s - 1$ con $s \in \mathbb{Z}$, $s > 1$ è primo, allora $n = 2^{s-1}(2^s - 1)$ è perfetto.

(c) Sia n un numero perfetto <u>pari</u>; sapendo che n è della forma $2^{s-1}(2^s - 1)$ con $s > 1$ e $2^s - 1$ primo, provare che il prodotto dei divisori positivi di n è uguale a n^s, cioè che

$$\prod_{d|n} d = n^s.$$

2. Determinare tutte le eventuali soluzioni del seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 3X \equiv 12 \pmod{13} \\ 8X \equiv 20 \pmod{28} \\ 9X \equiv 2 \pmod{11} \end{cases}$$

3. Si consideri la congruenza $X^3 \equiv a \pmod{p}$, con $p \geqslant 5$ numero primo e a primo con p. Provare che:

   (a) Se $p \equiv 1 \pmod{6}$, allora la congruenza non ha soluzioni oppure ha tre soluzioni incongruenti modulo p.

   (b) Se $p \equiv 5 \pmod{6}$, allora la congruenza ha una sola soluzione modulo p.

4. Stabilire se le seguenti congruenze quadratiche sono risolubili e, nei casi di risolubilità, trovare le soluzioni:

   (a) $X^2 \equiv 42 \pmod{11^3}$;

   (b) $X^2 + X + 1 \equiv 0 \pmod{7^2}$;

   (c) $X^2 + 6X + 2 \equiv 0 \pmod{3^3}$.

5. Si considerino le seguenti funzioni aritmetiche:

$$t_1(n) = |\{d \in \mathbb{N}^+ \ : \ d|n \ \text{ e } \ d \equiv 1 \pmod 4\}|$$

$$t_3(n) = |\{d \in \mathbb{N}^+ \ : \ d|n \ \text{ e } \ d \equiv 3 \pmod 4\}|$$

$$s(n) = t_1(n) - t_3(n)$$

(a) Stabilire se t_1 e t_3 sono moltiplicative.

(b) Provare che s è moltiplicativa.

(c) Calcolare $s(p^h)$ con p primo e $h \in \mathbb{N}^+$.

6. Risolvere le seguenti equazioni diofantee attraverso le frazioni continuate semplici:

   (a) $263X + 16Y = 10$;

   (b) $32X - 47Y = -8$.