

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008**  
**TN1 - Introduzione alla teoria dei numeri**  
**Tutorato 8 (14 maggio 2009)**  
**Giacomo Milizia**

1. Provare che se  $(x, y, z)$  è una terna pitagorica primitiva positiva, allora  $x + y$  e  $x - y$  sono congruenti a 1 o 7 modulo 8.
2. Provare che se  $(x, y, z)$  è una terna pitagorica primitiva positiva, allora 12 divide  $xy$ ; pertanto 60 divide  $xyz$ .
3. Trovare tutti i triangoli pitagorici le cui aree sono uguali al loro perimetro.  
(Sugg.: se  $x^2 + y^2 = z^2$  e  $x + y + z = \frac{1}{2}xy$ , allora  $(x - 4)(y - 4) = 8$ .)
4. Provare che se  $(x, y, z)$  è una terna pitagorica primitiva positiva in cui  $x, z$  sono interi positivi consecutivi, allora

$$x = 2t(t + 1), \quad y = 2t + 1, \quad z = 2t(t + 1) + 1$$

per qualche  $t > 0$ .

5. Provare che se  $(x, y, z)$  è una terna pitagorica primitiva positiva in cui  $z - y = 2$ , allora

$$x = 2s, \quad y = s^2 - 1, \quad z = s^2 + 1$$

per qualche  $s$  intero positivo.

6. Provare che l'equazione  $X^4 - Y^4 = 2Z^2$  non ha soluzioni negli interi positivi.
7. Provare che l'equazione  $X^4 - 4Y^4 = Z^2$  non ha soluzioni negli interi positivi.
8. Provare che non esistono triangoli pitagorici la cui area è due volte l'area di un quadrato con lato intero.