

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008**  
**TN1 - Introduzione alla teoria dei numeri**  
**Tutorato 9 (28 maggio 2009)**  
**Giacomo Milizia**

1. Stabilire quali dei seguenti numeri interi si possono scrivere come somma di due quadrati:

216, 1568, 30685, 11583.

2. Scrivere i seguenti numeri primi come somma di due quadrati:

53, 137, 241, 421.

3. Provare che se  $n \equiv 3$  oppure  $n \equiv 6 \pmod{9}$ , allora  $n$  non è esprimibile come somma di due quadrati.

4. Scrivere ciascuno dei seguenti numeri interi come somma di quattro quadrati:

$165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$ ,  $247 = 13 \cdot 19$ ,  $1147 = 31 \cdot 37$ .

5. Un intero positivo si dice *triangolare* se è somma di interi consecutivi a partire da 1.

- (a) Un numero è triangolare se e solo se è della forma  $\frac{n(n+1)}{2}$  per qualche  $n \geq 1$  (Pitagora circa 550 a.C.)
- (b) Un intero  $m$  è un numero triangolare se e soltanto se  $8m + 1$  è un quadrato perfetto. (Plutarco, circa 100 d.C.)
- (c) La somma di due numeri triangolari successivi è un quadrato perfetto. (Nicomaco, circa 100 d.C.)
- (d) Se  $m$  è un numero triangolare, lo sono anche  $9m + 1$ ,  $25m + 3$  e  $49m + 6$ . (Eulero, 1775)
- (e) Se  $t_n$  denota l' $n$ -esimo numero triangolare, allora

$$t_n = \binom{n+1}{2}.$$

- (f) Provare che :

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad n \geq 1$$

(Aryabhata, circa 500 d.C.).

6. Se  $n$  è la somma di due numeri triangolari, allora  $4n + 1$  è somma di due quadrati.

7. (a) Sia  $p$  un numero primo dispari.  
Provare che se  $p$  divide  $a^2 + b^2$  con  $a, b$  numeri interi coprimi, allora  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .
- (b) Utilizzando la parte (a), provare che ogni divisore positivo di una somma di due quadrati di interi coprimi è esso stesso la somma di due quadrati.