Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Appello X
11 settembre 2012

*Cognome*____________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Si consideri il seguente sistema lineare in due variabili:

$$\begin{cases} \lambda X + Y \equiv 4\mu \pmod{13} \\ 3X + \lambda Y \equiv 3\mu + 1 \pmod{13} \end{cases}$$

   (a) Stabilire quando, al variare di λ e μ con $0 \leq \lambda,\ \mu \leq 12$, il sistema è risolubile e nei casi in cui è risolubile quante soluzioni ammette.

   (b) Trovare, se esistono, le soluzioni del sistema dato per $8 \leqslant \lambda \leqslant 9$ e $1 \leqslant \mu \leqslant 2$.

2. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni della seguenti congruenze polinomiali:

   (a) $f(X) = X^3 + 2X^2 + X + 1 \equiv 0 \pmod{125}$;

   (b) $g(X) = X^{14} - 2X^{13} + 4X^9 - 8X^8 + X - 2 \equiv 0 \pmod{21}$.

3. Sia p un numero primo tale che $p \equiv 1 \pmod 3$.

   (a) Provare che:

      i. esiste un numero intero c tale che $\mathrm{MCM}(c, p) = 1$ e $\mathrm{ord}_p(c) = 3$;

      ii. $(2c + 1)^2 \equiv -3 \pmod p$.

   (b) Cosa si può dedurre dal secondo punto del quesito precedente?

4. Sia p un primo dispari ed a un intero positivo $\leqslant p-1$. Dimostrare che se $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, allora $\sum_{d|a} d^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod{p}$.

5. (a) Stabilire quali dei seguenti numeri sono somma di due quadrati:
    i. 2240073;
    ii. 287375 ;
    iii. 51597.
   (b) Scrivere i numeri del punto precedente, quando possibile, come somma di due quadrati.

6. Sia $\psi : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita da:

$$\psi(n) = \left(\frac{n}{61}\right) \sigma(n).$$

(a) Stabilire se ψ è moltiplicativa.

(b) Sia $F = \psi * \tau$. Calcolare $F(101)$ e $F^{-1}(101)$.

(c) Sia f la funzione aritmetica determinata dalla formula di inversione di Möbius. Calcolare $f(101)$.