

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Esercitazione 6
25 maggio 2012

1. Sia λ la funzione di *Liouville*, definita nel modo seguente:

$$\lambda(n) := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ (-1)^{\sum_{i=1}^r h_i} & \text{se } n = p_1^{h_1} \cdots p_r^{h_r} \end{cases} .$$

Dimostrare che:

- (a) λ è completamente moltiplicativa;
- (b) $\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è un quadrato} \\ 0 & \text{altrimenti } n = p_1^{h_1} \cdots p_r^{h_r} \end{cases} .$
- (c) $\lambda^{-1} = \mu\lambda = |\mu|$.
- (d) $\sum_{d|n} \lambda^{-1}(d) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2^r & \text{se } n = p_1^{h_1} \cdots p_r^{h_r} \end{cases} .$

2. (a) Sia

$$f(n) = |\{p \mid p \text{ è primo e } p \text{ divide } n\}|$$

Provare che la funzione

$$g(n) := i^{f(n)}$$

è moltiplicativa.

- (b) Calcolare $(g * \mu)(28)$ e $(g * \mu)(60)$.

3. Si consideri la funzione moltiplicativa $F = \sigma * \varphi$.

- (a) Calcolare $F(35)$ e $F^{-1}(35)$.
- (b) Sia f la funzione aritmetica determinata dalla formula di inversione di Möbius. Calcolare $f(35)$.