Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Esercitazione 3
30 marzo 2012

1. (a) Provare che per ogni intero positivo n si ha:
$$\mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3) = 0$$
   (b) Provare che per ogni intero $n \geqslant 3$ si ha:
$$\sum_{k=1}^{n} \mu(k!) = 1$$

2. Sia $n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r}$ la fattorizzazione in primi distinti di un numero naturale $n \geqslant 2$ con $e_i \geqslant 1$ per $1 \leqslant i \leqslant r$. Provare che se f è una funzione moltiplicativa non identicamente nulla, allora
$$\sum_{d|n} \mu(d)f(d) = (1 - f(p_1))(1 - f(p_2)) \cdots (1 - f(p_r))$$
.

3. Sia $n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r}$ la fattorizzazione in primi distinti di un numero naturale $n \geqslant 2$ con $e_i \geqslant 1$ per $1 \leqslant i \leqslant r$. Utilizzando l'esercizio precedente, provare che:
   (a) $\sum_{d|n} \mu(d)\tau(d) = (-1)^r$;
   (b) $\sum_{d|n} \mu(d)\sigma(d) = (-1)^r p_1 p_2 \cdots p_r$;
   (c) $\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = (1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})) \cdots (1 - \frac{1}{p_r})$;
   (d) $\sum_{d|n} \mu(d)d = (1 - p_1)(1 - p_2)) \cdots (1 - p_r)$.

4. Sia $n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r}$ la fattorizzazione in primi distinti di un numero naturale $n \geqslant 2$ con $e_i \geqslant 1$ per $1 \leqslant i \leqslant r$.
   Si consideri la seguente funzione aritmetica:
$$\omega(n) := \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ r & \text{se } n \geqslant 2 \end{cases}.$$
   (a) Calcolare $\omega(60)$ e $\omega(125)$; stabilire se ω è moltiplicativa.
   (b) Sia g la funzione aritmetica definita da $g(n) = 2^{\omega(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Verificare che g è moltiplicativa.
   (c) Sia f la funzione aritmetica definita da $f(n) = \sum_{d|n} |\mu(d)|$. Stabilire se f è una funzione moltiplicativa.
   (d) Provare che $g = f$.