Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Esercizi 7

1. Trovare il numero delle soluzioni delle seguenti congruenze quadratiche:
   (a) $X^2 \equiv 57 \pmod{2^6 \cdot 7^5 \cdot 29^6}$;
   (b) $X^2 \equiv 9 \pmod{2^2 \cdot 5}$.

2. Trovare, se esistono, le soluzioni delle seguenti congruenze quadratiche:
   (a) $X^2 \equiv 49 \pmod{144}$;
   (b) $X^2 \equiv 25 \pmod{168}$.

3. Calcolare i seguenti simboli di Jacobi:
$$\left(\frac{776}{105}\right), \quad \left(\frac{-424}{335}\right), \quad \left(\frac{90}{949}\right).$$

4. Siano $n > 1$ ed $m > 1$ interi dispari tali che $n \equiv 1 \pmod 8$ e $m \equiv 2$ (mod n); calcolare il simbolo di Jacobi
$$\left(\frac{5m+n}{m}\right).$$

5. Determinare per quali valori del parametro λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 6$, la seguente congruenza quadratica
$$4X^2 + (\lambda - 2)X + 3\lambda \equiv 0 \pmod 7$$
è risolubile.

6. (a) Determinare per quali valori del parametro λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 10$, la seguente congruenza quadratica
$$3X^2 + X + \lambda \equiv 0 \pmod{11}$$
è risolubile.
   (b) Per ogni valore di λ per il quale la congruenza in (a) è risolubile determinare tutte le sue soluzioni.

7. (a) Determinare per quali valori del parametro λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 29$, la seguente congruenza quadratica
$$X^2 + 3X + \lambda \equiv 0 \pmod{30}$$
è risolubile.

(b) Per ogni valore di λ per il quale la congruenza in (a) è risolubile determinare tutte le sue soluzioni.

8. Provare che se (x, y, z) è una terna pitagorica primitiva positiva, allora $x + y$ e $x - y$ sono congruenti a 1 o 7 modulo 8.

9. Provare che se (x, y, z) è una terna pitagorica primitiva positiva, allora 12 divide xy; pertanto 60 divide xyz.

10. Trovare tutti i triangoli pitagorici le cui aree sono uguali al loro perimetro. (Sugg.: se $x^2 + y^2 = z^2$ e $x + y + z = \frac{1}{2}xy$, allora $(x - 4)(y - 4) = 8$.)

11. Provare che se (x, y, z) è una terna pitagorica primitiva positiva in cui $x,\ z$ sono interi positivi consecutivi, allora

$$x = 2t(t + 1), \qquad y = 2t + 1, \qquad z = 2t(t + 1) + 1$$

per qualche $t > 0$.

12. Provare che se (x, y, z) è una terna pitagorica primitiva positiva in cui $z - y = 2$, allora

$$x = 2s, \qquad y = s^2 - 1, \qquad z = s^2 + 1$$

per qualche s intero positivo.