

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Esercitazione 1
2 marzo 2012

1. Determinare le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} X \equiv 2 \pmod{14} \\ X \equiv 16 \pmod{21} \\ X \equiv 10 \pmod{30} \end{cases}$$

2. Determinare tutte le eventuali soluzioni del seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 3X \equiv 12 \pmod{13} \\ 8X \equiv 20 \pmod{28} \\ 9X \equiv 2 \pmod{11} \end{cases}$$

3. Determinare una inversa modulo 5 delle seguenti matrici:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. (1 esonero A.A. 2010-2011) Trovare, al variare del parametro λ ($0 \leq \lambda \leq 4$), le soluzioni del seguente sistema lineare in due variabili:

$$\begin{cases} \lambda X + 3Y \equiv 1 \pmod{5} \\ 2X - \lambda Y \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

5. (Appello X, A.A. 2010-2011) Si consideri il seguente sistema lineare in due variabili:

$$\begin{cases} 5X - 3Y \equiv 3 + 4\mu \pmod{11} \\ 7X - \lambda Y \equiv 8 \pmod{11} \end{cases}$$

- (a) Stabilire quando, al variare di λ e μ con $0 \leq \lambda, \mu \leq 10$, il sistema è risolubile e nei casi in cui è risolubile quante soluzioni ammette.
(b) Trovare, se esistono, le soluzioni del sistema dato per $2 \leq \lambda \leq 3$ e $5 \leq \mu \leq 6$.

6. Sia p un numero primo dispari. Provare che per ogni $n \geq 1$ si ha:

$$[(p-1)!]^{p^{n-1}} \equiv -1 \pmod{p^n}.$$