Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Esercizi 2

1. Per ciascuna delle seguenti equazioni diofantee lineari, stabilire la risolubilità e nei casi positivi determinare tutte le soluzioni:

   (a) $11X + 4Y = 3$

   (b) $6X - 15Y = 7$

   (c) $4X + 2Y = 1001$

   (d) $58X - 134Y = 10.$

2. Determinare tutte le eventuali soluzioni dei seguenti sistemi di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 8X \equiv 5 \pmod{9} \\ 11X \equiv 8 \pmod{13} \\ 3X \equiv 6 \pmod{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3X \equiv 2 \pmod{5} \\ 17X \equiv 6 \pmod{7} \\ 7X \equiv 10 \pmod{16} \\ 3X \equiv 6 \pmod{9} \end{cases}$$

3. Provare che il sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} X \equiv 5 \pmod{6} \\ X \equiv 7 \pmod{15} \end{cases}$$

   non possiede soluzioni.

4. Provare che il sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} X \equiv a \pmod{n} \\ X \equiv b \pmod{m} \end{cases}$$

   ammette una soluzione se e solo se $\mathrm{MCD}(n, m) \mid a - b$. Se una soluzione esiste, verificare che essa è unica modulo $\mathrm{mcm}(n, m)$.

5. Trovare il più piccolo intero $a > 2$ tale che

$$2 \mid a, \quad 3 \mid a + 1, \quad 4 \mid a + 2, \quad 5 \mid a + 3, \quad 6 \mid a + 4.$$

6. Si consideri l'equazione diofantea:
$$4(\lambda - 5)X + 125Y = 60.$$
   (a) Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{Z}$ l'equazione è risolubile.
   (b) Determinare esplicitamente le soluzioni dell'equazione data per $\lambda = 31$.

7. Utilizzando il teorema di Wilson, provare che per ogni numero primo dispari p si ha che:
$$1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}.$$
   Sugg. : $k \equiv -(p-k)) \pmod{p}$

8. Provare che per ogni primo dispari p e per ogni $j \in \mathbb{Z}$ con $0 \leqslant j \leqslant p-1$ si ha:
$$\binom{p-1}{j} \equiv (-1)^j \pmod{\mathrm{p}}.$$

9. Provare che per ogni numero primo p con $n < p \leqslant 2n$ si ha:
$$\binom{2n}{n} \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{e} \quad \binom{2n}{n} \not\equiv 0 \pmod{p^2}.$$

10. Utilizzando il piccolo teorema di Fermat, provare che per ogni intero positivo n si ha che $42 | n^7 - n$.

11. Provare che se p è un numero primo, allora
$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p}.$$

12. Usare il teorema di Eulero-Fermat per determinare l'ultima cifra nell'espansione decimale di 3^{1231}.