

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Esercitazione 4
9 maggio 2014

1. (2 esoneri A.A. 2011/2012) Si consideri la funzione moltiplicativa $F = \sigma * \varphi$.
 - (a) Calcolare $F(35)$ e $F^{-1}(35)$.
 - (b) Sia f la funzione aritmetica determinata dalla formula di inversione di Möbius. Calcolare $f(35)$.
2. (2 esoneri A.A. 2011/2012) Provare che per ogni intero positivo n si ha:

$$\sum_{d|n} \frac{n\sigma(d)}{d} = \sum_{d|n} d\tau(d)$$

3. Provare che:
 - (a) $\varphi = \mathbf{e} * \mu$;
 - (b) $\tau * \mu = \mathbf{1}$;
 - (c) $\sigma * \mu = \mathbf{e}$.
4. Provare che se f è una funzione aritmetica totalmente moltiplicativa non identicamente uguale a 0, allora $f(1) = 1$ e $f^{-1} = \mu f$.
5. Provare che:
 - (a) $\tau^{-1} = \mu * \mu$;
 - (b) $\sigma^{-1} = \mu \mathbf{e} * \mu$;
 - (c) $\varphi^{-1} = \mu \mathbf{e} * \mathbf{1}$.
6. Provare se f è una funzione aritmetica moltiplicativa non identicamente uguale a 0, allora:
 - (a) $\mu f * \mathbf{1}$ è moltiplicativa;
 - (b) $(\mu f * \mathbf{1})(n) = \prod_{i=1}^r (1 - f(p_i))$ con $n = p_1^{e-1} \cdots p_r^{e-r}$.