**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014**
**TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri**
**Esercizi 2**

1. Determinare tutte le eventuali soluzioni dei seguenti sistemi di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 7X \equiv 2 \pmod{9} \\ 9X \equiv 11 \pmod{13} \\ 7X \equiv 6 \pmod{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4X \equiv 2 \pmod{5} \\ 19X \equiv 4 \pmod{7} \\ 3X \equiv 7 \pmod{8} \\ 12X \equiv 15 \pmod{27} \end{cases}$$

2. Verificare che il sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} X \equiv 2 \pmod{6} \\ X \equiv 6 \pmod{15} \end{cases}$$

non possiede soluzioni.

3. Trovare il più piccolo intero $a > 2$ tale che

$$2 \mid a, \quad 3 \mid a+1, \quad 4 \mid a+2, \quad 5 \mid a+3, \quad 6 \mid a+4.$$

4. Si consideri l'equazione diofantea:

$$4(\lambda - 5)X + 125Y = 60.$$

   (a) Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{Z}$ l'equazione è risolubile.
   (b) Determinare esplicitamente le soluzioni dell'equazione data per $\lambda = 31$.

5. Utilizzando il teorema di Wilson, provare che per ogni numero primo dispari $p$ si ha che:

$$1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \cdots \cdot (p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}.$$

Sugg. : $k \equiv -(p-k)) \pmod{p}$

6. Provare che per ogni primo dispari $p$ e per ogni $j \in \mathbb{Z}$ con $0 \leqslant j \leqslant p-1$ si ha:

$$\binom{p-1}{j} \equiv (-1)^j \pmod{\text{p}}.$$

7. Provare che per ogni numero primo $p$ con $n < p \leqslant 2n$ si ha:
$$\binom{2n}{n} \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{e} \quad \binom{2n}{n} \not\equiv 0 \pmod{p^2}.$$

8. Utilizzando il piccolo teorema di Fermat, provare che per ogni intero positivo $n$ si ha che $42|n^7 - n$.

9. Provare che se $p$ è un numero primo, allora
$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p}.$$

10. Usare il teorema di Eulero-Fermat per determinare l'ultima cifra nell'espansione decimale di $3^{1231}$.