Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Esercizi 3

1. Utilizzando l'esponenziazione modulare, calcolare 17^{31} mod 58, 4^{65} mod 199 e 27^{33} mod 157.

2. Sia$p$ un numero primo dispari. Provare che
$$1^p + 2^p + \cdots + (p-1)^p \equiv 0 \pmod{p}$$

3. Utilizzare il teorema di Eulero-Fermat per trovare il resto della divisione di 3^{100000} per 35.

4. Siano a, b interi positivi e primi tra loro; provare che
$$a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{(ab)}$$

5. (Appello A 2011/12) Siano p un numero primo e k un numero naturale tale che $0 \leqslant k \leqslant p-1$; provare che:
$$k!(p-k-1)! \equiv (-1)^{k+1} \pmod{p}$$

6. (a) Provare che se p è un numero primo, allora
$$(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}.$$
   (b) Provare che se p è un numero primo dispari, allora
$$(p-3)! \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p}$$

7. (Appello A 2008/09)Sia p un numero primo dispari. Utilizzando il principio di induzione, provare che per ogni $n \geqslant 1$ si ha:
$$[(p-1)!]^{p^{n-1}} \equiv -1 \pmod{p^n}$$

8. Sia p un numero primo maggiore di 3. Provare che:
$$2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} \equiv 1 \pmod{p}$$