

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014**  
**TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri**  
**Esercizi 10**

1. Quali tra le seguenti funzioni aritmetiche sono moltiplicative? Quali totalmente moltiplicative? Motivare le risposte.

(a)  $f(n) = \frac{n}{2}$ ;

(b)  $f(n) = n^n$ ;

(c)  $f(n) = \log n$ ;

(d)  $f(n) = n + 1$ ;

(e)  $f(n) = \frac{1}{n}$ .

2. Sia  $n$  un intero positivo. Provare che:

(a)  $\tau(n)$  è un intero dispari se e solo se  $n$  è un quadrato.

(b)  $\sigma(n)$  è un intero dispari se e solo se  $n$  è un quadrato o il doppio di un quadrato.

3. Sia  $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$  la fattorizzazione in primi distinti di un numero naturale  $n \geq 2$  con  $e_i \geq 1$  per  $1 \leq i \leq r$ . Provare che se  $f$  è una funzione moltiplicativa non identicamente nulla, allora

$$\sum_{d|n} \mu(d)f(d) = (1 - f(p_1))(1 - f(p_2)) \cdots (1 - f(p_r)).$$

4. Sia  $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$  la fattorizzazione in primi distinti di un numero naturale  $n \geq 2$  con  $e_i \geq 1$  per  $1 \leq i \leq r$ . Utilizzando l'esercizio precedente, provare che:

(a)  $\sum_{d|n} \mu(d)\tau(d) = (-1)^r$ ;

(b)  $\sum_{d|n} \mu(d)\sigma(d) = (-1)^r p_1 p_2 \cdots p_r$ ;

(c)  $\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = (1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_r})$ ;

(d)  $\sum_{d|n} \mu(d)d = (1 - p_1)(1 - p_2) \cdots (1 - p_r)$ .

5. Sia  $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$  la fattorizzazione in primi distinti di un numero naturale  $n \geq 2$  con  $e_i \geq 1$  per  $1 \leq i \leq r$ .

Si consideri la seguente funzione aritmetica:

$$\omega(n) := \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ r & \text{se } n \geq 2 \end{cases}.$$

- (a) Calcolare  $\omega(60)$  e  $\omega(125)$ ; stabilire se  $\omega$  è moltiplicativa.
- (b) Sia  $g$  la funzione aritmetica definita da  $g(n) = 2^{\omega(n)}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ . Verificare che  $g$  è moltiplicativa.
- (c) Sia  $f$  la funzione aritmetica definita da  $f(n) = \sum_{d|n} |\mu(d)|$ . Stabilire se  $f$  è una funzione moltiplicativa.
- (d) Provare che  $g = f$ .