Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AL2 - algebra 2, gruppi, anelli e campi
APPELLO B
11 febbraio 2004

*Cognome*____________________ *Nome*_______________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Siano G un gruppo di ordine 14 ed N un suo sottogruppo normale di ordine 2.
   (a) Provare che c'è in G un elemento di ordine 7.
   (b) Stabilire se G è abeliano.
   (c) Stabilire se G è ciclico.

2. Sia R un anello commutativo ed unitario; sia H un sottogruppo del gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili di R, $U(R)$.

   Sia
$$N = \{A \in \mathbf{GL}(n, R) \quad | \quad det(A) \in H\}\,.$$

   Provare che

   (a) N è un sottogruppo normale di $\mathbf{GL}(n, R)$;

   (b) $\mathbf{GL}(n, R)/N \cong U(R)/H$.

3. Sia $\mathcal{C}([0,1])$ l'anello delle funzioni continue reali definite sull'intervallo $[0,1]$.

   (a) Provare che $\mathcal{C}([0,1])$ non è un dominio d'integrità.

   (b) Caratterizzare gli elementi invertibili di $\mathcal{C}([0,1])$.

   Sia $T \subseteq [0,1]$; si ponga

   $$I(T) := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \quad | \quad f(y) = 0 \quad \forall y \in T\}.$$

   (a) Provare che $I(T)$ è un ideale di $\mathcal{C}([0,1])$.

   (b) Se $x \in [0,1]$, si ponga $M_x = I(\{x\})$.

      i. Provare che M_x è un ideale massimale di $\mathcal{C}([0,1])$.

      ii. Determinare, a meno di un isomorfismo, $\mathcal{C}([0,1])/M_x$.

4. Sia p un numero primo. Siano

$$R_1 = \mathbb{Z}_p[X]/(X^2 - 2) \quad \text{ed} \quad R_2 = \mathbb{Z}_p[X]/(X^2 - 3).$$

Stabilire se $R_1 \cong R_2$ per $p = 2$, $p = 3$, $p = 11$.