Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AL2 - Algebra 2, gruppi anelli e campi
Esercizi
17 ottobre 2004

1 Sottogruppi normali.

1. *Lemma della farfalla* Siano U e V due sottogruppi di un gruppo G, siano H e K sottogruppi normali di U e V, rispettivamente. Allora

   (a) $H(U \cap K)$ è normale in $H(U \cap V)$

   (b) $(H \cap V)K$ è normale in $(U \cap V)K$

   e i gruppi quozienti sono isomorfi, i.e.

$$H(U \cap V)/H(U \cap K) \cong (U \cap V)K/(H \cap V)K.$$

2. *Sottogruppo derivato* Sia G un gruppo. Consideriamo $U = \{xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in G\}$, il sottogruppo generato da U si chiama sottogruppo dei commutatori, o derivato, e si denota con G'. Dimostrare che:

   (a) G' è normale in G

   (b) G/G' è commutativo

   (c) Se G/N è commutativo allora $N \supset G'$

   (d) Se H è un sottogruppo di G e $H \supset G'$, allora H è normale in G.

2 Omomorfismi e sottogruppi normali.

1. Sia G un gruppo abeliano finito di ordine m. Sia n primo con m. Dimostrare che ogni $g \in G$ si può scrivere come $g = x^n$ con $x \in G$, i.e. esiste $x \in G$ tale che $x^n = g$.

2. Sia $f_n : (\mathbb{Z}, +) \mapsto (\mathbb{Z}, +)$ definita da $f_n(x) = nx$. Verificare che f_n è un omomorfismo, trovare il nucleo e l'immagine di f_n.

3. Sia $f_n : (\mathbb{Z}, +) \mapsto (\mathbb{Z}_m, +)$ definita da $f_n(x) = nx \mod m$.

   (a) Per quali n, f_n è un omomorfismo di gruppi.

   (b) Per tali n trovare il nucleo e l'immagine di f_n.

3 Gruppo Simmetrico.

1. Determinare i sottogruppi normali di S_3 e S_4.
2. Determinare il centro di S_3 e S_4.
3. Determinare il centralizzante di:
   (a) $\langle id, (12)\rangle$ in S_3
   (b) $\langle id, (12)\rangle$ in S_4
   (c) $\langle id, (12), (123)\rangle$ in S_4.
4. Determinare il normalizzante di:
   (a) $\langle id, (12)\rangle$ in S_3
   (b) $\langle id, (12)\rangle$ in S_4
   (c) $\langle id, (12), (123)\rangle$ in S_4.
5. In S_5 trovare una permutazione per ogni struttura ciclica seguente:
   (a) (-)
   (b) (- -)(- -)
   (c) (- -)
   (d) (- -)(- - -)
   (e) (- - -)
   (f) (- - - -)
   (g) (- - - - -)
6. Consideriamo una scatola quadrata piatta riempita con 16 quadrati piatti di metallo, numerati come nella figura seguente:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

L'ultimo quadrato viene rimosso, rendendo possibile lo spostamento degli altri quadrati facendoli scivolare. Si consideri una sequenza qualsiasi di spostamenti che termini con l'angolo destro inferiore libero. Dimostrare che le permutazioni possibili per tali spostamenti sono solamente le permutazioni pari in A_{15}. Esempio:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$\longrightarrow$

3	6	7	8
9	2	1	4
5	10	13	14
12	11	15	

è una configurazione finale ammissibile.

4 Matrici.

1. Consideriamo l'applicazione determinante:

$$\det : (Gl_2(\mathbb{C}), *) \mapsto (\mathbb{C}^*, *)$$

   provare che è un omomorfismo di gruppi. Determinare il nucleo, l'immagine e scrivere la relazione di equivalenza generata. Il nucleo si chiama $Sl_2(\mathbb{C})$.

2. Consideriamo l'applicazione traccia:

$$tr : (M_2(\mathbb{C}), +) \mapsto (\mathbb{C}, +)$$

   provare che è un omomorfismo di gruppi. Determinare il nucleo, l'immagine e scrivere la relazione di equivalenza generata.