Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AL2 - Algebra 2, gruppi anelli e campi
Esercizi
31 ottobre 2004

1 Gruppo Simmetrico

1. Per ogni divisore p, primo, di $Ord(S_4)$ trovare un elemento di ordine p.

2. Per quali divisori n di $Ord(S_4)$ esiste un elemento di ordine n ?

3. Verificare l'equazione delle classi per S_4 e S_3.

4. Dimostrare che due qualsiasi sottogruppi di ordine 3 di S_4 sono coniugati.

2 Omomorfismi

1. Siano G e G' due gruppi di ordine primo fra loro, dimostrare che l'unico omomorfismo fra G e G' è quello banale.

2. Trovare tutte gli omomorfismi fra $\mathbb{Z}_n$ e $\mathbb{Z}_m$:
   (a) per m e $n = 2, 3, 4, 5$
   (b) per m e n qualsiasi.

3. Trovare tutti gli omomorfismi fra S_3 e $(\mathbb{Z}_6, +)$

4. Sia ϕ un automorfismo di G, dimostrare che $\phi(Z(G)) \subset Z(G)$.

3 Gruppi

1. *Prodotto semidiretto* Sia G un gruppo, H e N sottogruppi con N normale. Sia γ_x la coniugazione per l'elemento $x \in G$.
   (a) Dimostrare che $x \mapsto \gamma_x$ induce un omomorfismo $f : H \mapsto Aut(N)$
   (b) Se $H \cap N = \{e\}$, dimostrare che la applicazione $H \times N \mapsto HN$ data da $(x, y) \mapsto xy$ è una biezione, e che questa applicazione è un isomorfismo se e solamente se f è triviale, i.e. $f(x) = id_N$ $\forall x \in H$.
   Diremo che G è il *prodotto semidiretto* di H e N, e scriviamo $G = N \times_f H$ se $G = HN$ e $H \cap N = \{e\}$.

(c) Viceversa siano H e N due gruppi, e sia $\phi : H \mapsto Aut(N)$ un omomorfismo dato. Costruiamo il prodotto semidiretto nel modo seguente. Sia G l'insieme delle coppie (x, h) con $x \in N$ e $h \in H$, definiamo il prodotto nel modo seguente:

$$(x, h)(y, k) = (x\phi(h)(y), hk)$$

Dimostrare che questa è una legge di gruppo e che $G = N \times_\phi H$ identificando N con $(x, 1)$ e H con $(1, h)$

(d) Verificare che $N \times_{id} H \cong N \times H$.

2. Dire quale dei seguenti gruppi è esprimibile come prodotto diretto o semidiretto di due sottogruppi:
   (a) $(\mathbb{Z}, +)$,
   (b) $(\mathbb{Z}_8, +)$,
   (c) $(D_4, \circ)$,
   (d) $(\mathbb{Z}_6, +)$,
   (e) $(\mathbb{C}, +)$,
   (f) $(\mathbb{C}^*, .)$.

3. Un sottogruppo C di un gruppo G si dice *caratteristico* se $\phi(C) \subseteq C$ per ogni automorfismo ϕ di G. Dimostrare che:
   (a) ogni sottogruppo caretteristico è normale in G, e che il viceversa è falso,
   (b) G', sottogruppo derivato, è caratteristico.

4. Con metodi elementari si studi la struttura dei possibili gruppi di ordine 1,2,3,4.

5. Si verifichi il teorema di Cayley per G gruppo ciclico di orine 4 e G gruppo di Klein.

4 Gruppo Diedrale

1. Consideriamo D_4 il gruppo dei movimenti rigidi del quadrato.
   (a) Trovare tutti i sottogruppi di D_4,
   (b) Trovare le classi di coniugio di D_4.

2. Determinare il centro di D_n per ogni n.

3. Determinare $N(D_4)$ in S_4.

4. Dimostrare che D_n è generato da una riflessione e da una rotazione.

5. Si dimostri che il gruppo dei movimenti di un rettangolo è il gruppo di Klein.

5 Matrici

1. Sia M l'insieme delle matrici 3×3 a valori 0 e 1 e tali che ciascuna riga e ciascuna colonna contiene esattamente un 1. Si dimostri che rispetto al prodotto righe per colonne M è un gruppo e che esso è isomorfo a S_3.

2. Consideriamo l'insieme R delle matrici 2×2 della forma $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ per $\theta \in [0, 2\pi)$. Dimostrare che R è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne e che esso è isomorfo a $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$