Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Tutorato - Soluzioni
28 ottobre 2003

1. Sia $G = \langle g \rangle$ un gruppo ciclico con 20 elementi.

1. Elencare tutti i generatori di G.
2. Determinare tutti i sottogruppi di G e disegnarne il diagramma lineare.
3. Provare che l'applicazione $f : G \longrightarrow G$ definita da $f(x) = x^7$ è un automorfismo di G.
4. Determinare l'ordine di f in $Aut(G)$.

1. Dato che g è un generatore di G e $|G| = 20$ ogni elemento di G è del tipo g^h con $h \in \mathbb{N},\ 0 \leq h < 20$. Visto che $ord(g^h) = |G|/MCD(|G|, h)$ tutti e soli i generatori di G si hanno scegliendo h coprimo con $|G|$, ovvero $h = 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19$
2. Poiché G è un gruppo ciclico finito è noto che (*)$\forall n \in \mathbb{N}$ *t.c.* $n \mid |G|\ \exists!\ G' \ \leq G$ *t.c.* $|G'| = n$. Visto che, inoltre, ogni sgr. di G ciclico è ciclico il problema si riduce a trovare $\forall n \in \mathbb{N}$ *t.c.* $n \mid 20$ un elemento di ordine n. I divisori di 20 sono $1, 2, 4, 5, 10, 20$ e quindi i sgr. di G di ordine rispettivo sono $< g^{20} >=< e >, < g^{10} >, < g^5 >, < g^4 >, < g^2 >, < g^1 >= G$.Per disegnare il diagramma lineare rispetto alla relazione d'ordine data dall'inclusione ($\subseteq$) basta applicare (*) ai vari sottogruppi.
3. f è un omomorfismo: infatti $f(xy) = (xy)^7 = x^7y^7$ (G ciclico $\Rightarrow G$ abeliano) $= f(x)f(y)$. Visto che f è un endomorfismo si ha: f automorfismo $\Leftrightarrow f(g)$ è un generatore. Dato che $f(g) = g^7$ per 1. f è un automorfismo.
4. Dato che per G gruppo ciclico finito $(Aut(G), \circ) \simeq (U(\mathbb{Z}_{|G|}), \cdot)$, calcolare l'ordine di f è equivalente a calcolare l'ordine di 7 in $U(\mathbb{Z}_{20})$. $7 \equiv_{20} 7, 7^2 \equiv_{20} 9, 7^3 \equiv_{20} 3, 7^4 \equiv_{20} 1$. Quindi l'ordine di f è 4.

2. Determinare tutti gli omomorfismi da $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ a $(\mathbb{Z}_{24}, +)$ e per ciascuno di essi il nucleo e l'immagine.

Dalla teoria sappiamo che tutti gli omomorfismi da $\mathbb{Z}_n$ a $\mathbb{Z}_m$ sono del tipo $\phi_k : [x]_n \to [x(m/d)k]_m$, con $d = MCD(n,m)$ e $0 \leq k \leq d-1$. Inoltre $Ker(\phi_k) = \{[x]_n \ t.c. \ x(m/d)k \equiv 0 \mod m\} = \{[x]_n \ t.c. \ xk \equiv 0 \mod d\}$ e $Im(\phi_k) =< \phi_k(1) >=< [(m/d)k]_m >$.
Nel nostro caso $n = 20, m = 24, d = 4, (m/d) = 6$, quindi abbiamo 4 omomorfismi. ϕ_0 è l'omomorfismo banale, quindi $Ker(\phi_0) = \mathbb{Z}_{20}$ e $Im(\phi_0) = \{[0]_{24}\}$. $Ker(\phi_1) = Ker(\phi_3) = \{[0]_{20}, [4]_{20}, [8]_{20}, [12]_{20}, [16]_{20}\}$ e $Im(\phi_1) = Im(\phi_3) = \{[0]_{24}, [6]_{24}, [12]_{24}, [18]_{24}\}$. Infine $Ker(\phi_2) = \{h[2]_{20} \ t.c. \ 0 \leq h \leq 9\}$ e $Im(\phi_k) = \{[0]_{24}, [12]_{24}\}$.

3. Sia H il sottogruppo ciclico di S_8 generato da $(351)(27)(48)$. Allora H agisce come un gruppo di trasformazioni sull'insieme $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Calcolare l'orbita e lo stabilizzatore di ogni elemento di X.

$\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(3) = \mathcal{O}(5) = \{1,3,5\}$; $\mathcal{O}(2) = \mathcal{O}(7) = \{2,7\}$; $\mathcal{O}(4) = \mathcal{O}(8) = \{4,8\}$; $\mathcal{O}(6) = \{6\}$. Sia $g = (351)(27)(48)$. Allora $< g >= H$ ha 6 elementi. $St_1 = St_3 = St_5 = \{id, g^3\}$; $St_2 = St_7 = St_4 = St_8 = \{id, g^2, g^4\}$; $St_6 =< g >= H$. Si ricordi che, in generale, $St_{h \star x} = hSt_x h^{-1}$. Poiché H è commutativo si ha quindi che elementi della stessa orbita hanno stesso stabilizzatore.

4. Sia K il sottogruppo di S_8 generato da (13) e (247). Allora K agisce come un gruppo di trasformazioni sull'insieme $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Calcolare l'orbita e lo stabilizzatore di ogni elemento di X.

Sia $g = (13)$, $h = (247)$. $K =< g, h >$ ha 6 elementi. $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(3) = \{1,3\}$; $\mathcal{O}(2) = \mathcal{O}(4) = \mathcal{O}(7) = \{2,4,7\}$; $\mathcal{O}(5) = \{5\}$; $\mathcal{O}(6) = \{6\}$; $\mathcal{O}(8) = \{8\}$. $St_1 = St_3 = \{id, h, h^2\}$; $St_2 = St_4 = St_7 = \{id, g\}$; $St_5 = St_6 = St_8 =< g, h >= K$

5. Descrivere l'orbita e lo stabilizzatore della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ quando il gruppo $GL_2(\mathbb{R})$ agisce per coniugazione su se stesso.

Se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}_3)$, trovare il numero degli elementi della sua orbita quando il gruppo $GL_2(\mathbb{Z}_3)$ agisce per coniugazione su se stesso.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Allora, per definizione, $\mathcal{O}(A) = \{MAM^{-1} \ t.c. \ M \in GL_2(\mathbb{R})\}$, cioè l'orbita di A è l'insieme delle matrici simili ad A in $M_2(\mathbb{R})$. Dato che:

1. $\forall B \in \mathcal{O}(A) \ p_t(B) = p_t(A) = t^2 - 3t + 2$ (dove p_t è il polinomio

caratteristico)

2. $C \in M_2(\mathbb{R})$ $t.c.$ $p_t(C) = t^2 - 3t + 2 \Rightarrow C$ è diagonalizzabile (infatti $p_t(C)$ ha due soluzioni reali distinte: gli autovalori hanno perciò molteplicità algebrica = molt. geometrica = 1)

3. Se $C \in M_2(\mathbb{R})$ allora $p_t(C) = t^2 - tr(C) + det(C)$ (dove $tr(C)$ è la traccia di C)

si ha che $\mathcal{O}(A) = \{B \in M_2(\mathbb{R})\ t.c.\ tr(B) = 3,\ det(B) = 2\}$.
Si noti che la condizione, per $p_t(C)$, di avere due radici distinte è essenziale per la diagonalizzabilità di C: la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pur avendo lo stesso pol. caratt. della matrice id. non è diagonalizzabile, visto che il suo unico autovalore (1) ha molt. algebrica 2 ma molt. geom. 1.
$St_A = \{M \in GL_2(\mathbb{R})\ t.c.\ AM = MA\}$. Sia M una matrice generica $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Da $AM = MA$ si ricava che b, c devono essere nulli. Affinché M sia invertibile si deve avere inoltre che $a, d \neq 0$ Quindi St_A è l'insieme delle matrici reali quadrate di ordine 2 invertibili e diagonali.

Nel caso di $GL_2(\mathbb{Z}_3)$, visto che $|GL_2(\mathbb{Z}_3)| < \infty$, si ha che $|\mathcal{O}(A)| = |GL_2(\mathbb{Z}_3)|/|St_A|$.
$|St_A| = 4$ (vi sono solo 4 matrici invertibili e diagonali in $GL_2(\mathbb{Z}_3)$).
$|GL_2(\mathbb{Z}_3)| = 48$, visto che la prima riga di una matrice in $M_2(\mathbb{Z}_3)$ si può scegliere in $3 \cdot 3$ modi. Affinché sia invertibile però è necessario escludere la riga nulla. Per la seconda riga si hanno sempre 9 scelte, ma questa volta bisogna escludere non solo la riga nulla ma anche tutti i multipli della prima riga. Il numero totale di scelte è quindi $(3 \cdot 3 - 1) \cdot (3 \cdot 3 - 3) = 8 \cdot 6 = 48$.
Concludendo: $|\mathcal{O}(A)| = 12$.

6. Sia $G = \{z \in \mathbb{C} \quad | \quad |z| = 1\}$ il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi di modulo 1.

1. Sia $z_0 \in G$. Provare che $z_0 G = \{z_0 z \quad | \quad z \in G\}$ è un sottogruppo di G e calcolare $G/z_0 G$.

2. $G/\langle -1 \rangle$ è isomorfo ad un gruppo noto. Quale?

3. Siano $n > 1$ un intero e $z_n = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$. A quale gruppo (a voi noto) è isomorfo $G/\langle z_n \rangle$?

1. $z_0G \subseteq G$. Siano $a, b \in z_0G$. Allora $\exists\ \alpha, \beta \in G$ $t.c.$ $a = z_0\alpha, b = z_0\beta$, . $ab^{-1} = z_0(\alpha z_0^{-1}\beta^{-1}) \in z_0G$. Quindi z_0G è un sgr. di G. Sia $z \in G$. Allora $z = z_0(z_0^{-1}z) \in z_0G$. Quindi $z_0G = G$ e G/z_0G è il gruppo banale (cioè col solo el. neutro).

2. Cfr. 3. per $n = 2$.

3. Si consideri l'omomorfismo $\phi_n : G \to G$ t.c. $\phi_n(z) = z^n$. $Ker(\phi_n) = \{z \in G\ t.c.\ z^n = 1\} = \{\text{radici n-esime dell'unità}\} =< z_n >$. Inoltre ϕ_n è suriettivo, dato che $\mathbb{C}$ è alg. chiuso e $|z^n| = 1 \Rightarrow |z| = 1$. Per il teorema fondamentale di isomorfismo si ha: $G/ < z_n >\simeq G$.