Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2002/2003
AL2 - algebra 2, gruppi, anelli e campi
APPELLO A
29 gennaio 2004

*Cognome*____________________ *Nome*_______________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

GRUPPI

1. Per interi positivi fissati m_0,n_0, b_0 si consideri il <u>sottoinsieme</u> S del gruppo $\mathbf{GL}(3,\mathbb{Z})$ delle matrici invertibili del terzo ordine ad elementi in $\mathbb{Z}$ (rispetto al prodotto righe per colonne) definito da:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m & n \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(3,\mathbb{Z}) \qquad | \qquad m_0|m,\, n_0|n,\, b_0|b \right\}$$

   (a) Trovare una condizione necessaria e sufficiente su m_0, n_0, b_0 affinché S sia un sottogruppo di $\mathbf{GL}(3,\mathbb{Z})$.

   (b) Nel caso in cui S sia un sottogruppo di $\mathbf{GL}(3,\mathbb{Z})$

      i. trovare il centro di S, $\mathcal{Z}(S)$;

      ii. determinare, a meno di un isomorfismo, il gruppo quoziente $S/\mathcal{Z}(S)$.

2. (a) Sia G un gruppo; provare che se H è un sottogruppo <u>normale</u> di G di indice n, allora per ogni $g \in G$ si ha che $g^n \in H$.

   (b) Mostrare con un esempio che il risultato del punto (a) è falso se H non è normale in G.

   (c) Provare che il gruppo alterno A_4 non ha un sottogruppo di ordine 6. (Sugg. : Trovare almeno 8 elementi di A_4 che sono quadrati ed applicare il punto (a)).

*Cognome*___________________ *Nome*______________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

ANELLI E CAMPI

3. Siano X un insieme non vuoto e $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle sue parti.

   Allora $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$, dove $+$ è la differenza simmetrica, $A + B = A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$ con A, B sottoinsiemi di X, e $\cdot$ è la intersezione, è un anello commutativo unitario; inoltre tale anello è booleano, cioé per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$ si ha che $A^2 = A$.

   (a) Provare che $\mathcal{P}(X)$ è un dominio d'integrità se e solo se $|X| = 1$.

   (b) Sia $x \in X$; sia
   $$I_x = \{A \in \mathcal{P}(X) \quad | \quad x \notin A\}.$$
   Provare che I_x è un ideale massimale di $\mathcal{P}(X)$.

   (c) Provare che $\mathcal{P}(X)/I_x \cong \mathbb{Z}_2$.

   (d) Se $|X| = 3$, determinare tutti gli ideali di $\mathcal{P}(X)$ e mostrare che ogni ideale massimale è del tipo I_x per qualche $x \in X$.

4. Sia $r \in \mathbb{Z}_p$ con p numero primo. Sia

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ br & a \end{pmatrix} \quad | \quad a, b \in \mathbb{Z}_p \right\}.$$

(a) Verificare che A è un sottoanello commutativo ed unitario dell'anello $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_p)$ con p^2 elementi.

(b) Provare che A è un sottocampo di $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_p)$ se e solo se r non è un quadrato in $\mathbb{Z}_p$.

(c) Determinare per quali $r \in \mathbb{Z}_{11}$ l'anello A è un campo.

(d) Determinare un isomorfismo esplicito tra A e $\mathbb{Z}_p[X]/(X^2 - r)$.