Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2002/2003
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Prima prova di valutazione intermedia
5 novembre 2003

*Cognome*__________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. (8 pt) Determinare l'ordine , la parità e la classe di coniugio dei seguenti elementi di S_{14}:

1. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 2 & 1 & 14 \end{pmatrix}$;

2. $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 4 & 7 & 10 & 2 & 14 & 12 & 13 & 5 & 6 & 8 & 3 & 1 & 9 & 11 \end{pmatrix}$.

2. (7 pt) Si consideri il gruppo ciclico $\mathbb{Z}_{18}$.

1. Elencare i generatori di $\mathbb{Z}_{18}$.
2. Descrivere il sottogruppo di $\mathbb{Z}_{18}$ di ordine 6.
3. Sia H il sottogruppo di $\mathbb{Z}_{216}$ di indice 12. Elencare i suoi generatori.
4. Dire quanti sono gli omomorfismi suriettivi da $\mathbb{Z}_{216}$ su $\mathbb{Z}_{54}$.

3. (6 pt) Nel gruppo moltiplicativo dei numeri complessi non nulli $\mathbb{C}^*$ si consideri la seguente relazione d'equivalenza ρ:

$$\alpha \rho \beta \Leftrightarrow \alpha|\beta| = \beta|\alpha|, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*.$$

1. Verificare che ρ è compatibile con l'operazione in $\mathbb{C}^*$.
2. Descrivere esplicitamente il sottogruppo $[1]_\rho$.
3. Provare che $\mathbb{C}^*/[1]_\rho$ è isomorfo ad $H = \{z \in \mathbb{C} \quad | \quad |z| = 1\}$.

4. (6 pt) Si consideri il gruppo additivo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$.

1. Sia α un numero razionale non nullo. Verificare che l'applicazione $\mu_\alpha : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definita da $\mu_\alpha(x) = \alpha x$ per ogni numero razionale x è un automorfismo di $\mathbb{Q}$.

2. Provare che $(Aut(\mathbb{Q}), \circ)$ è isomorfo al gruppo moltiplicativo dei numeri razionali non nulli $\mathbb{Q}^*$.

5. (14 pt) Sia $T = \{A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_2\}$.

1. Determinare il numero degli elementi di T e verificare che T è un sottogruppo di $Gl_3(\mathbb{Z}_2)$ rispetto al prodotto righe per colonne.
2. Per ciascun divisore, n, dell'ordine di T, elencare gli elementi di T di ordine n.
3. Calcolare il centro di T.
4. Determinare tutti i sottogruppi normali di T e, a meno di isomorfismo, i gruppi ad esso omomorfi.
5. Verificare che $T \cong D_4$.