Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Seconda prova di valutazione intermedia
12 gennaio 2004

*Cognome*____________________ *Nome*______________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. (10 pt) Siano p un numero primo ed $A = \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_p)$ l'anello delle matrici con l'usuale somma e prodotto righe per colonne.

1. Trovare la cardinalità di A.
2. Sia
$$B = \{M = (m_{ij}) \in A : m_{ij} = 0, i \leq j\}$$
Verificare se
   (a) B è un sottoanello di A.
   (b) B è un ideale destro o sinistro di A.
   (c) $\forall\ M \in B$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $M^n = 0$.
3. Definiamo un nuovo prodotto $*$ su A: $\forall\ M$ e $N \in A$ ponendo
$$M * N = M \cdot N - N \cdot M.$$
   (a) Verificare se $*$ gode della proprietà associativa.
   (b) Verificare se vale la proprietà distributiva della usuale somma tra matrici $+$ rispetto a $*$.

   Dire se $(A, +, *)$ è un anello.

2. (9 pt) Stabilire se i seguenti ideali di $\mathbb{Z}[X]$ sono primi e/o massimali:

1. $(3, X)$;
2. $(X^2 - 3X + 2)$
3. $(X^2 - 3)$;
4. $(7, X^2 - 3)$.

3. (8 pt) Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$ si consideri l'ideale

$$I = (3 - i, 5 + 10i).$$

1. Stabilire se I è principale ed eventualmente determinarne un generatore.
2. Stabilire se I è primo e/o massimale.
3. Descrivere l'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/I$.
   (Sugg. Si consideri l'omomorfismo anulare $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[i]/I$ definito da $\varphi(n) = n + I$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$).

4. (9 pt) Si consideri nell'anello $\mathbb{Z}_3[X]$ il polinomio $f(X) = X^3 + 2X^2 + 1$; sia $I = (X^3 + 2X^2 + 1)$.

1. Verificare che il polinomio $f(X)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_3[X]$.
2. Descrivere il campo $K = \mathbb{Z}_3[X]/I$.
3. Trovare in K l'inverso dell'elemento $(X^4 + X) + I$.
4. Provare che $t = X + I$ è un generatore del gruppo moltiplicativo $K - \{0\}$.