Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2002/2003
AL2 - algebra 2, gruppi, anelli e campi
Tutorato
18 novembre 2003

1. Si consideri il seguente sottoinsieme del corpo dei quaternioni reali $\mathbf{H}(\mathbb{R})$:

$$\mathbf{H}(\mathbb{Z}) = \{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \quad | \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Verificare che $\mathbf{H}(\mathbb{Z})$ è un sottoanello di $\mathbf{H}(\mathbb{R})$ unitario, non commutativo e privo di divisori dello zero.
2. Determinare gli elementi invertibili di $\mathbf{H}(\mathbb{Z})$.
3. Se $\mathbf{q} = 3\mathbf{1} - 2\mathbf{j}$ e $\mathbf{q}' = -1\mathbf{1} + 1\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$, trovare $\mathbf{q} + \mathbf{q}'$, $\mathbf{q}\mathbf{q}'$ e $\mathbf{q}^{-1}$.

2. Sia A un anello ed $a \in A$; a si dice
- *idempotente* se $a^2 = a$;
- *nilpotente* se esiste $n > 0$ tale che $a^n = 0$.

1. Provare che se a è nilpotente e $a \neq 0$, allora a è zero-divisore.
2. Provare che se A è unitario ed a è idempotente con $a \neq 0$ e $a \neq 1$, allora a è zero-divisore.
3. Dare l'esempio di un elemento $\neq 0$ nilpotente e non idempotente.
4. Dare l'esempio di un elemento $\neq 0$ e $\neq 1$ idempotente e non nilpotente.
5. Trovare gli elementi nilpotenti e gli elementi idempotenti in un dominio d'integrità unitario.
6. Provare che se A è un anello commutativo unitario, a un elemento invertibile e b nilpotente, allora $a + b$ è invertibile.
7. Trovare gli elementi idempotenti e gli elementi nilpotenti di $\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_{12}$ e di $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12}$.

3. Un anello R si dice *Booleano* se $a^2 = a$ per ogni $a \in R$, i.e. se ogni suo elemento è idempotente. Provare che:

1. per ogni $a \in R$ si ha che $a + a = 0$;
2. R è commutativo.
3. Verificare che sono anelli Booleani:
   (a) $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$;
   (b) per ogni insieme S, $(\mathcal{P}(S), +, \cdot)$, dove $+$ è la differenza simmetrica, $X + Y = X \Delta Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$ per X, Y sottoinsiemi di S, e $\cdot$ è la intersezione.
   (c) per ogni insieme S, $\mathcal{P}_{fin}(S) = \{X \subseteq S \quad | \quad X \text{ finito}\}$ rispetto alla differenza simmetrica e alla intersezione.

4. Verificare che se S è infinito, $\mathcal{P}_{fin}(S)$ non è unitario.

5. Dare le tabelle per $+$ e $\cdot$ per $\mathcal{P}(S)$ con $S = \{a, b\}$.

4. Sia A un anello commutativo ed $\mathcal{N}(A)$ l'insieme dei suoi elementi nilpotenti.

1. Provare che $\mathcal{N}(A)$ è un ideale di A detto *nilradicale* o *radicale primo* dell'anello A.

2. Trovare $\mathcal{N}(\mathbb{Z})$ e $\mathcal{N}(\mathbb{Z}_{32})$.

5. Siano A un anello commutativo ed I un suo ideale; provare che l'insieme $\sqrt{I}$ di tutti gli $a \in A$ tali che $a^n \in I$ per qualche intero positivo n è un ideale di A, detto *radicale* di I.

1. Dare un esempio di un ideale non nullo $I \neq A$ tale che $\sqrt{I} \neq I$ ed un esempio di ideale non nullo $J \neq A$ tale che $\sqrt{J} = J$.

2. Quale relazione si può stabilire tra la nozione di nilradicale di un anello e quella di radicale di un ideale?

6. Nell'anello $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_m)$ con $m > 1$, si consideri il seguente sottoinsieme

$$A_m = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \,:\, a, b \in \mathbb{Z}_m \right\}.$$

1. Provare che A_m è un sottoanello non commutativo e non unitario di $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_m)$.

2. Provare che A_m è un ideale sinistro e non è un ideale destro di $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_m)$.

3. Si consideri l'applicazione $\varphi : A_m \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ definita da $\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = b$.

   (a) Provare che φ è un omomorfismo.

   (b) Determinare $\mathrm{Im}(\varphi)$ e $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

4. Sia $I_m = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,:\, c \in \mathbb{Z}_m \right\}$. Provare che I_m è un ideale di A_m.

5. ** Provare che l'anello A_m / I_m è unitario se e solo se m è dispari.