Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AL2 - algebra 2, gruppi, anelli e campi
Tutorato
16 dicembre 2003

1. Provare che se D è un dominio d'integrità tale che $D[X]$ è un PID, allora D è un campo.

2. Si consideri nell'anello $\mathbb{Z}_7[X]$ il polinomio $g(X) = X^2 + X + 1$.
   (a) Stabilire se l'ideale $I = (g(X))$ è primo in $\mathbb{Z}_7[X]$.
   (b) Calcolare il numero degli elementi dell'anello quoziente $\mathbb{Z}_7[X]/I$.
   (c) Scrivere nella forma $(a+bX)+I$ l'inverso moltiplicativo dell'elemento invertibile $(X^4 + X^3 + 5X^2 + 3X + 2) + I$.

3. Nell'anello $\mathbb{Z}_3[X]$ si considerino i seguenti polinomi:
$$f(X) = X^3 + 2X^2 + X + 2 \qquad g(X) = X^4 + 2X^2 + 1.$$
   (a) Stabilire se gli ideali $I = (f(X))$ e $J = (g(X))$ sono primi in $\mathbb{Z}_3[X]$.
   (b) Provare che esiste un unico ideale massimale M che contiene sia I che J.
   (c) Descrivere il campo $\mathbb{Z}_3[X]/M$.

4. Si consideri il polinomio
$$f(X) = 3X^2 + 4X + 3 \in \mathbb{Z}_m[X].$$
   (a) Stabilire se, per $m = 2, 3, 7$, $f(X)$ è irriducibile.
   (b) Per $m = 5$, spiegare perchè le fattorizzazioni $(3X + 2)(X + 4)$ e $(4X+1)(2X+3)$ di $f(X)$ in $\mathbb{Z}_5[X]$ non contraddicono la fattorialità dell'anello $\mathbb{Z}_5[X]$.
   (c) Determinare gli elementi idempotenti di $\mathbb{Z}_5[X]/I$, dove I è l'ideale generato da $f(X)$ in $\mathbb{Z}_5[X]$.

5. Si consideri nell'anello $\mathbb{Z}_5[X]$ il polinomio $f(X) = X^4+2$; sia $I = (X^4+2)$.
   (a) Verificare che il polinomio $f(X)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_5[X]$.
   (b) Descrivere il campo $K = \mathbb{Z}_5[X]/I$.
   (c) Trovare in K l'inverso dell'elemento $(X^2 + X + 1) + I$.

6. Sia p un numero primo dispari.
   (a) Provare che per $a \in \mathbb{Z}_p^\star$ l'equazione $X^2 = a$ ha una soluzione se e solo se $a^{\frac{p-1}{2}} = 1$.
   (Sugg. : $\mathbb{Z}_p^\star$ è un gruppo ciclico.)
   (b) Usando il punto precedente, stabilire se il polinomio $X^2 - 6$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_{17}[X]$.
   (c) Sia $I = (X^2 - 6)$. Cosa si può dire dell'anello quoziente $A = \frac{\mathbb{Z}_{17}}{I}$?
   (d) Determinare in A l'inverso dell'elemento $2t - 1$ con $t = X + I$.