Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Scienze della Formazione
Laboratorio di Matematica per la Formazione Primaria

Grafi, alberi e reti: modelli su cui cercare soluzioni "ottime"

Mini corso "Informatica e Matematica nella Scuola Primaria"

Marco Liverani
liverani@mat.uniroma3.it

15 gennaio 2015

Modelli matematici per l'informatica

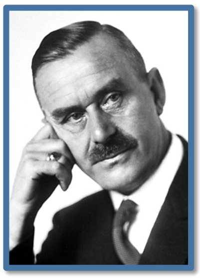
"Ogni tanto è necessario dire delle cose difficili, ma bisognerebbe dirle nel modo più semplice di cui si è capaci."

— Godfrey H. Hardy (1877–1947)

Modelli matematici: regioni senza polvere

- Scriveva Thomas Mann in un suo celebre romanzo ("*Altezza reale*", 1909):
  - *E i suoi studi, signorina, se posso informarmene? **Matematica**, a quanto so. Non la stanca? Non è terribilmente faticoso per il cervello?*
  - *Niente affatto, – ella rispose – non conosco nulla di più carino. **È un gioco nell'aria**, per dir così. O addirittura fuori dall'aria, **in regioni senza polvere**, comunque.*

- L'obiettivo dei matematici spesso è quello di creare una **regione senza polvere** (un modello matematico) in cui rappresentare, studiare e risolvere i problemi concreti

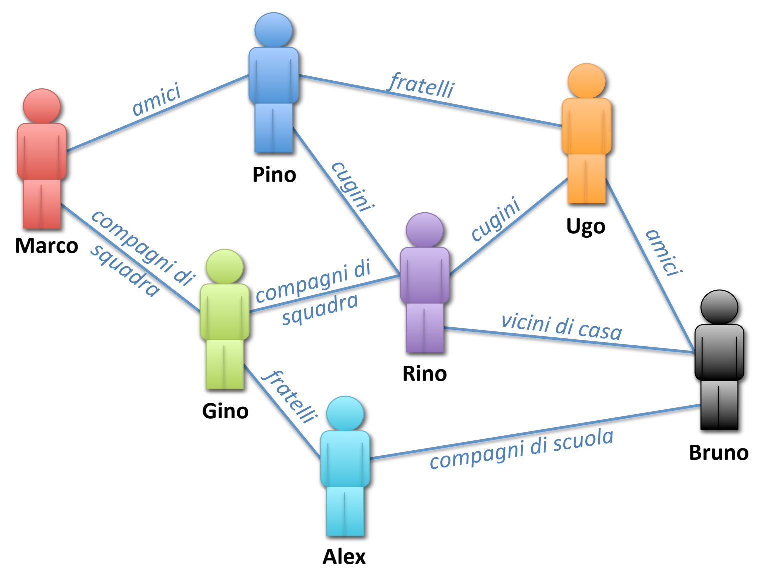


Thomas Mann (1875–1955)

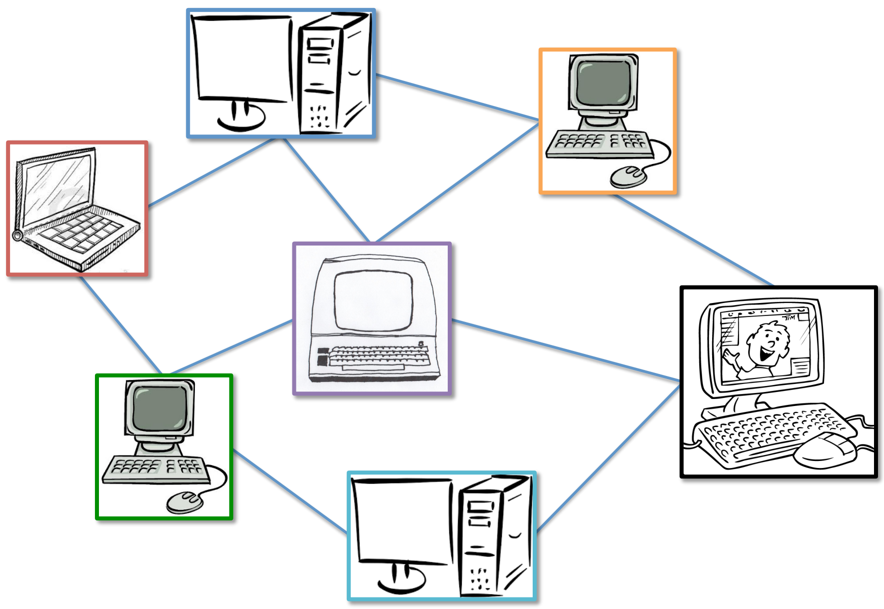
Creare regioni senza polvere

- Non è un compito facile: significa occuparsi di diversi aspetti in modo rigoroso e senza lasciare nulla al caso:
  - definire un **linguaggio** (una ***notazione***) con cui descrivere il problema e con cui poter parlare facilmente del problema
  - costruire un **modello semplificato** (ma completo) del problema utilizzando quel linguaggio
  - individuare e **dimostrare proprietà rilevanti**, utili per risolvere il problema originale
  - identificare **similitudini** tra il modello ed altri modelli realizzati in contesti differenti

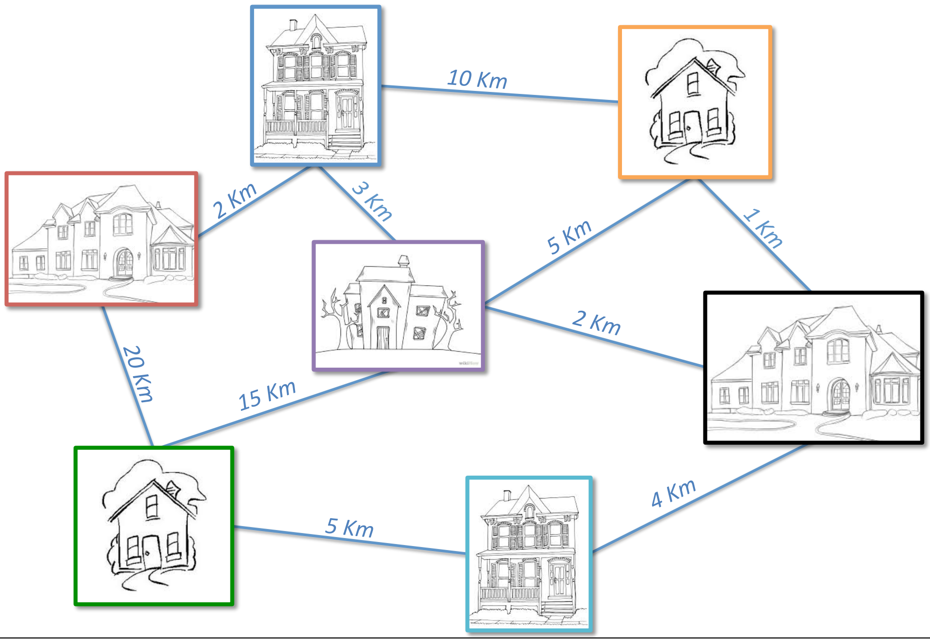
Un gruppo di amici



Una rete di computer

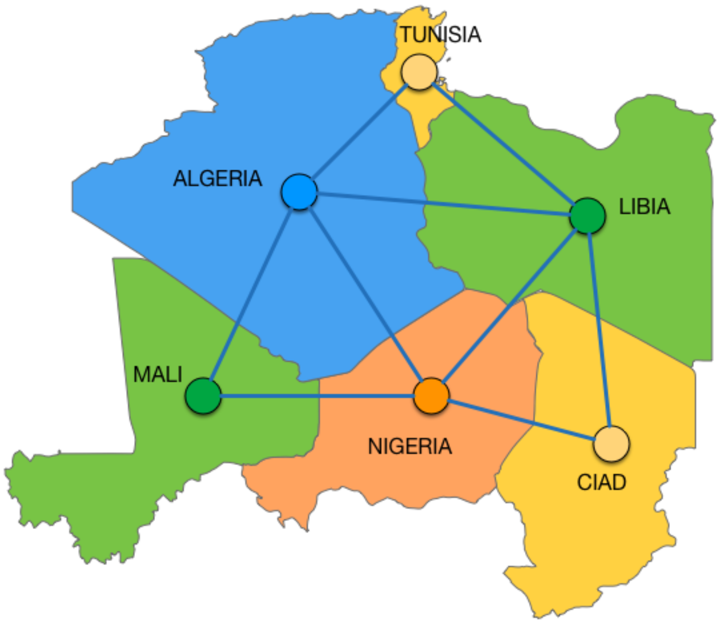


Le vie di una città

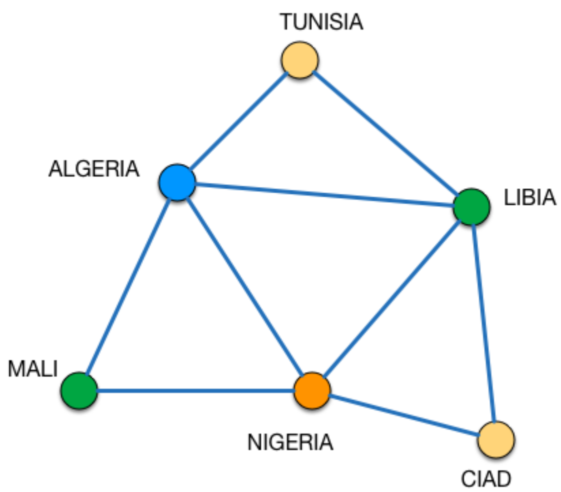


Una carta geografica

Una carta geografica



Una carta geografica



Grafi: strumenti per modellare la realtà

- Cosa hanno in comune un gruppo di persone, una rete di computer, un sito web, un social network, una carta geografica, la carta stradale di una città?
- Apparentemente nulla... salvo la possibilità di essere *schematizzati* con lo stesso strumento matematico:

un grafo!

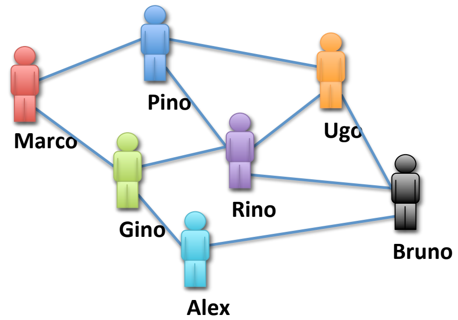
*(attenzione: ho detto proprio **GRAFO**, non GRAFICO, che è un'altra cosa e si usa in matematica per rappresentare qualitativamente sul piano cartesiano l'andamento di una funzione)*

Grafi: oggetti della matematica discreta

- Un grafo ***G*** è formato da:
  - un insieme ***V*** di **vertici** del grafo: $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$
  - un insieme ***E*** di **spigoli** del grafo: $E = \{(u, v)$, con u e v vertici del grafo$\}$
- Esempio:
  - ***V*** = {Marco, Pino, Gino, Rino, Ugo, Alex, Bruno}
  - ***E*** = {(Marco, Pino), (Marco, Gino), (Pino, Ugo), (Pino, Rino), (Ugo, Rino), (Gino, Rino), (Rino, Bruno), (Gino, Alex), (Bruno, Alex)}
- Gli ***spigoli*** del grafo sono formati da coppie di ***vertici*** del grafo
- L'insieme dei vertici è ***finito*** (non infinito) e ***discreto*** (non continuo)

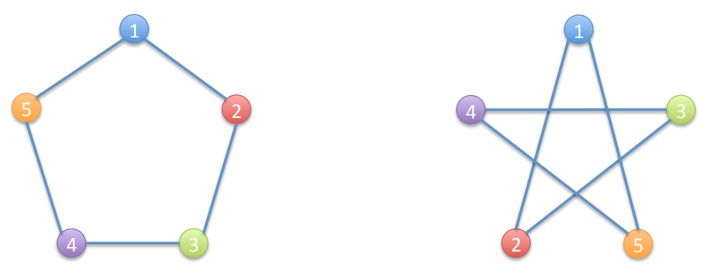
Disegnare un grafo

- Un grafo può essere disegnato rappresentando con punti i vertici e con linee da un vertice ad un altro, gli spigoli che collegano due vertici
- Esempio:
  - ***V*** = {Marco, Pino, Gino, Piero, Ugo, Alex, Bruno}
  - ***E*** = {(Marco, Pino), (Marco, Gino), (Pino, Ugo), (Pino, Rino), (Ugo, Rino), (Gino, Rino), (Rino, Bruno), (Gino, Alex), (Bruno, Alex)}



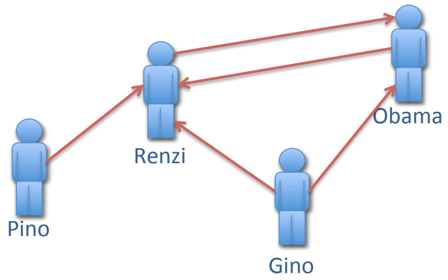
Disegnare un grafo

- Attenzione però: il disegno di un grafo è una *rappresentazione arbitraria*!
- In altre parole, uno *stesso grafo* può avere rappresentazioni (disegni) *diverse*
- Esempio:

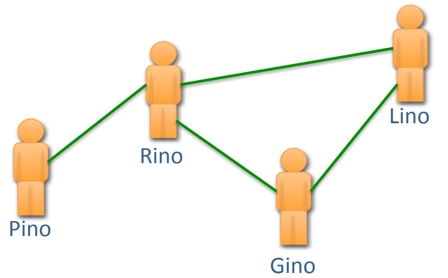


Twitter vs Facebook

- Grafo della rete di *Twitter*
  - Il grafo è **orientato**: gli spigoli hanno un **verso**
  - formalmente: $(u,v) \neq (v,u)$

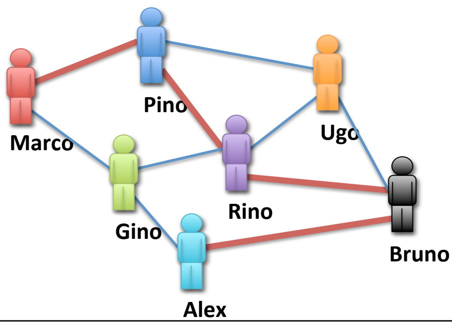


- Grafo della rete di *Facebook*
  - Il grafo è **non orientato**: gli spigoli non hanno un verso
  - formalmente: $(u,v) = (v,u)$



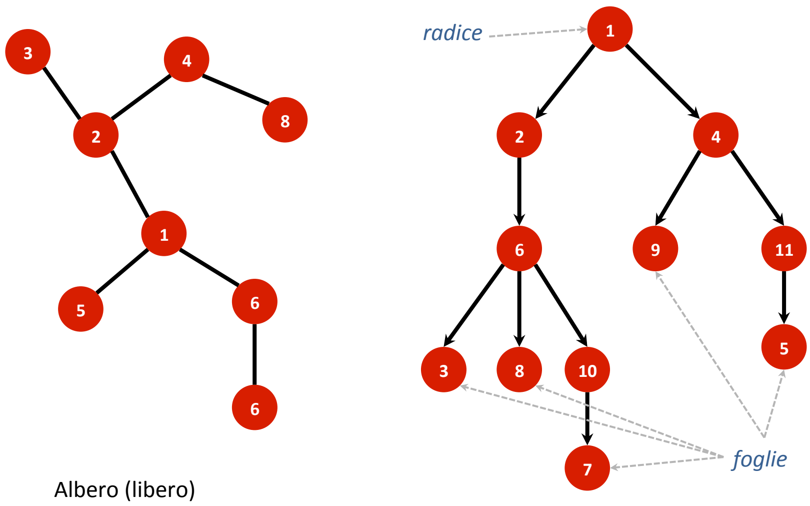
Vertici, spigoli, cammini e cicli

- Due vertici u e v collegati da uno spigolo (u,v) si dicono **adiacenti**
  - Nella figura: *Pino* e *Rino* sono adiacenti; l'insieme dei vertici adiacenti a *Rino* è {*Pino, Gino, Ugo, Bruno*}
- Un percorso sul grafo, da un vertice ad un altro, passando per gli spigoli che collegano i vertici, è un **cammino**
  - Un cammino è ***semplice*** se non passa due volte per lo stesso vertice
  - Esempio: cammino semplice da *Marco* ad *Alex*: Marco → Pino → Rino → Bruno → Alex
- Un grafo è **connesso** se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino
- Un **ciclo** è un cammino che inizia e termina sullo stesso vertice
  - Esempio: *Marco* → *Pino* → *Rino* → → *Gino* → *Marco*



Alberi

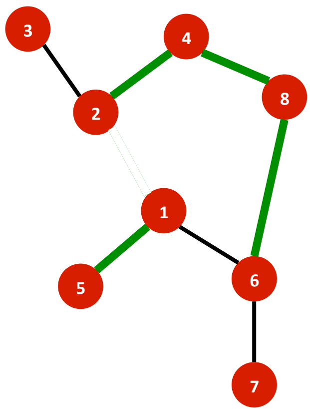
- Un **albero** è un grafo *connesso* e privo di cicli (*aciclico*)



Albero (libero)

Albero radicato orientato

Alberi

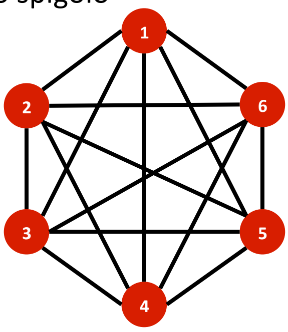


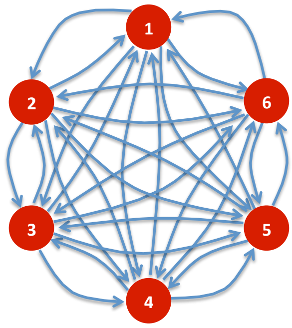
Alcune proprietà

- Il numero di spigoli è uguale al numero di vertici meno uno
- In un albero il cammino tra due vertici è unico
- Se tolgo uno spigolo il grafo si divide in due alberi (diventa una foresta)
- Se aggiungo uno spigolo si crea un ciclo

Grafi completi

- Un grafo è **completo** quando ogni coppia di vertici è collegata da uno spigolo

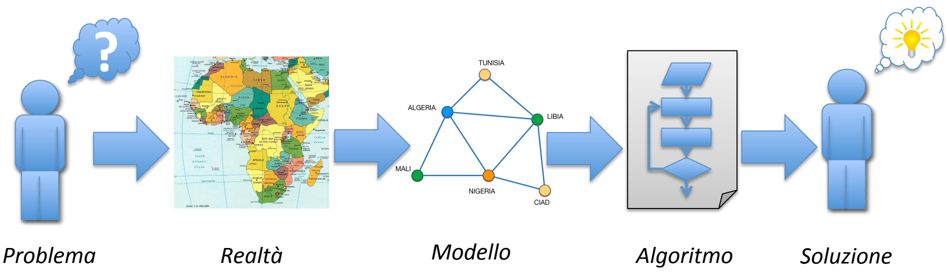




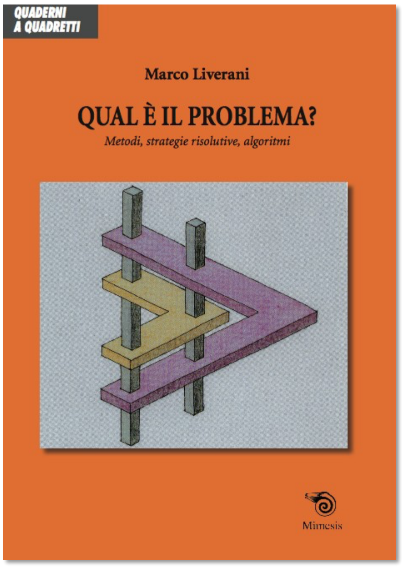
- Quanti spigoli ha un grafo completo con n vertici?
  - Se **è** orientato ne ha: $(n–1) + (n–1) + (n–1) + ... + (n–1) + (n–1) = n(n–1)$
  - Se **non è** orientato ne ha $(n–1) + (n–2) + (n–3) + ... + 2 + 1 = n(n–1)/2$

C'è problema e problema...

- I grafi (e gli alberi) costituiscono uno strumento formidabile per creare un **modello** di un contesto reale per poi risolvere un problema (anche per via algoritmica)



C’è problema e problema...



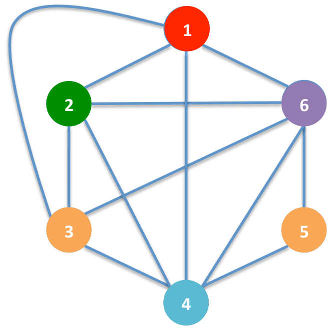
C’è problema e problema...

- Possiamo distinguere diversi tipi di problema:
  - **problema di decisione**: **esiste** almeno una soluzione? La risposta è di tipo “sì/no”, “vero/falso”
  - **problema di ricerca**: trovare **una** possibile soluzione del problema (se il problema di decisione ha risposta “sì”...)
  - **problema di enumerazione**: trovare **tutte** le possibili soluzioni del problema (se ne esiste una magari non è l’unica...)
  - **problema di ottimizzazione**: trovare la soluzione **migliore** secondo un certo criterio (non una qualsiasi, non tutte, ma la migliore!)

    Ad esempio:
    - tra tutte le possibili strade per raggiungere la meta, trovare la più breve (la soluzione ottima è la strada di ***minima* lunghezza**)
    - tra tutti i modi di colorare una mappa facendo sì che due regioni confinanti non abbiano lo stesso colore, trovare quella con il minor numero di colori (la soluzione ottima è quella composta dal ***minimo* numero di colori**)
    - tra tutti i possibili oggetti che posso riporre in una scatola, selezionare quelli più preziosi (la soluzione ottima è quella con il ***massimo* valore** complessivo degli oggetti selezionati)

Una buona colorazione

- Dato un grafo chiediamo di colorarne in vertici in modo che due vertici adiacenti non abbiano lo stesso colore
- È una particolare versione, più generale, del problema della colorazione di una carta geografica politica



- Problema di ottimizzazione: trovare il **minimo** numero di colori necessari

Una buona colorazione

- La matematica (un po’ di ragionamento) ci dice che...
  - se il grafo è un **albero** bastano **2 colori**
  - se il grafo è **planare** (può essere disegnato sul piano senza intersecarne gli spigoli) allora bastano **4 colori**
    - una carta geografica politica può essere modellizzata con un grafo planare, per questo quattro colori bastano per colorare una carta geografica!
  - altrimenti... è possibile che ne servano di più!
  - il limite estremo è il grafo completo: in tal caso servono tanti colori quanti sono i vertici del grafo
- Scoprire se un grafo è un albero è ... **facile**!
  - basta verificare che sia connesso e che non contenga cicli
- Scoprire se un grafo è planare è ... **facile**!
- Trovare una buona colorazione è ... **molto difficile**!
  - di fatto l’unico metodo è quello di provare ad assegnare **tutte le combinazioni di colori** ai vertici e tra queste scegliere quella con il minor numero di colori

Una buona colorazione

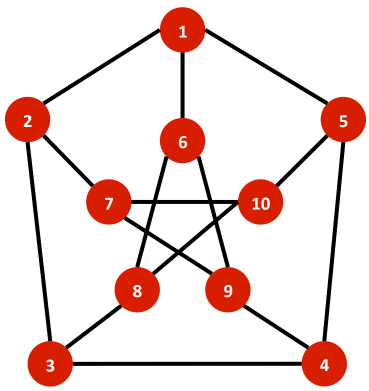
- Se il grafo ha *n* vertici, in quanti modi diversi possiamo colorare i suoi vertici?
- È un po' come chiedersi **in quanti modi possiamo raggruppare i vertici del grafo**...

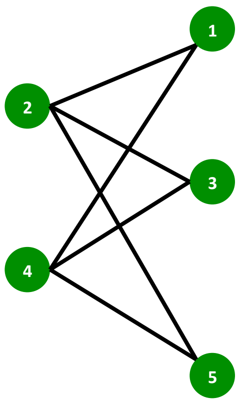
  ... quindi il numero di possibili colorazioni diverse è dato dal numero di partizioni dell'insieme dei vertici del grafo
- Esempio: $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Partizioni di *V:*

  {{1}, {2,3,4,5}}, {{2}, {1,3,4,5}}, {{3}, {1,2,4,5}}, {{4}, {1,2,3,5}}, {{5}, {1,2,3,4}}, {{1,2}, {3,4,5}}, {{1,3}, {2,4,5}}, {{1,4}, {2,3,5}}, {{1,5}, {2,3,4}}, {{2,3}, {1,4,5}}, {{1,2,3}, {4, 5}}, {{1, 2, 3, 4}, {5}}, ... sono TANTISSIME!!!
- È un fenomeno di **esplosione combinatoria**
- Anche per pochi dati del problema, le combinazioni da provare per individuare la soluzione sono troppe!

Playtime!

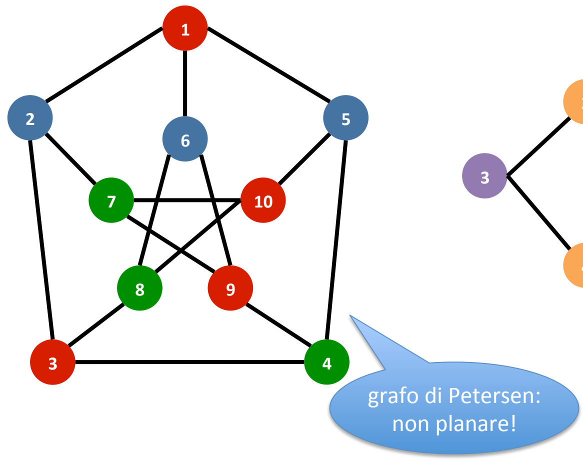
- Quale dei seguenti grafi è planare?
- Potete dare una "buona colorazione" per i seguenti grafi? Qual è il minimo numero di colori necessari?

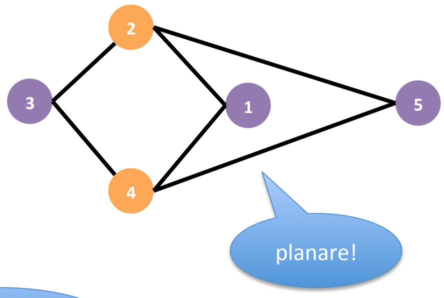




Playtime!

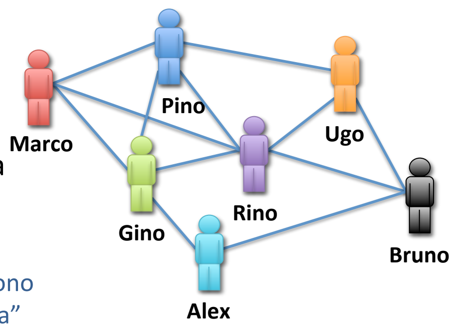
- Quale dei seguenti grafi è planare?
- Potete dare una “buona colorazione” per i seguenti grafi? Qual è il minimo numero di colori necessari?





La “cricca”

- Nelle relazioni tra amici (o tra aziende, o altri soggetti) è interessante individuare gruppi coesi, in cui la relazione di amicizia sia condivisa tra tutti i membri del gruppo
  - Esempio: {Marco, Pino, Rino, Gino} sono un gruppo coeso, formano una “cricca”
  - Lo stesso può dirsi per {Ugo, Rino, Bruno}



- Una **clique** di un grafo è un sotto-grafo *completo massimale*:
  - i vertici del sotto-grafo sono tra loro a due a due adiacenti e, aggiungendo al gruppo un altro vertice si perde questa proprietà
  - Esempio: {Ugo, Rino, Bruno} è una *clique*, ma se aggiungo al gruppo anche Pino, allora {Ugo, Rino, Bruno, Pino} non è una *clique* perché Bruno e Pino non sono adiacenti

La "cricca"

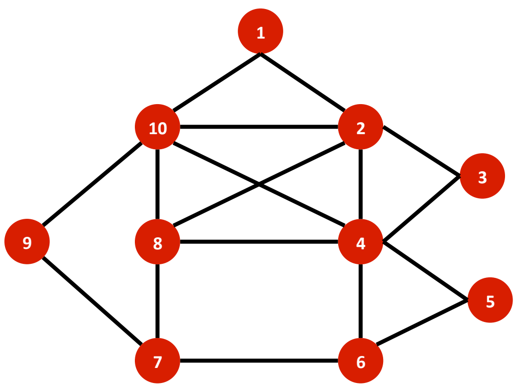
- Trovare tutte le *clique* di un grafo con *n* vertici è molto difficile
  - anche in questo caso il modo è quello di costruire tutti i sottoinsiemi di vertici del grafo e verificare se costituiscono una *clique*
- Quanti sono i sottoinsiemi dei vertici di un grafo con *n* vertici?
  - Ogni sottoinsieme di *V* è costruito scegliendo alcuni elementi di *V*
  - Supponiamo che *V* = {*a*, *b*, *c*, *d*}; allora

1.	A	=	{**a**, b, c, d}	9.	I	=	{**a**, b, c, **d**}
2.	B	=	{a, **b**, c, d}	10.	L	=	{a, **b**, c, **d**}
3.	C	=	{**a**, **b**, c, d}	11.	M	=	{**a**, **b**, c, **d**}
4.	D	=	{a, b, **c**, d}	12.	N	=	{a, b, **c**, **d**}
5.	E	=	{**a**, b, **c**, d}	13.	O	=	{**a**, b, **c**, **d**}
6.	F	=	{a, **b**, **c**, d}	14.	P	=	{a, **b**, **c**, **d**}
7.	G	=	{**a**, **b**, **c**, d}	15.	Q	=	{**a**, **b**, **c**, **d**}
8.	H	=	{a, b, c, **d**}	16.	R		{a, b, c, d}

  - Indicando con 1 e 0 gli elementi che scelgo o che non scelgo per costruire un certo sottoinsieme di *V*, ottengo i **numeri binari composti da *n* cifre**
  - Esempio: {**1**, 2, 3, **4**} → 1001_2 → 2^0+2^3 = 1+8 = 9
- Se i vertici sono *n* le possibili *clique* sono 2^n...
  ... 10 vertici = 1024 sottoinsiemi: **esplosione combinatoria**!

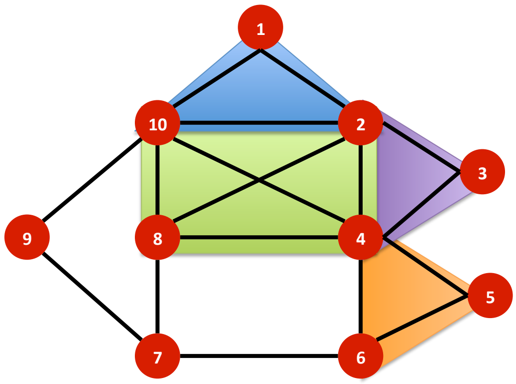
Playtime!

- Riuscite a trovare le ***clique*** composte da almeno 3 vertici nel grafo?



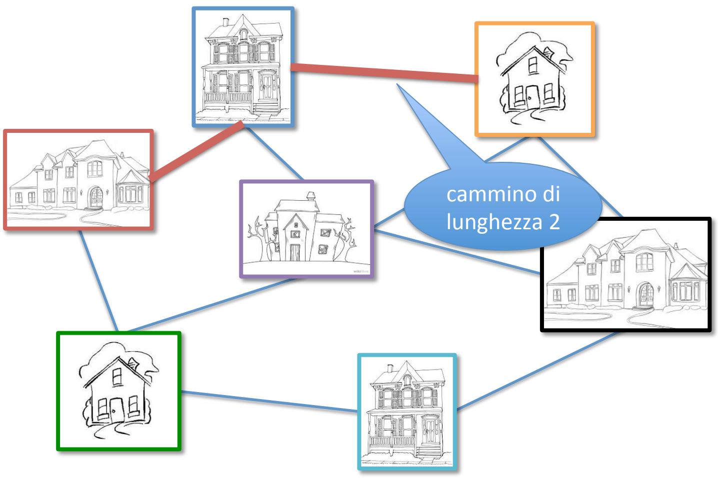
Playtime!

- Riuscite a trovare le ***clique*** composte da almeno 3 vertici nel grafo?



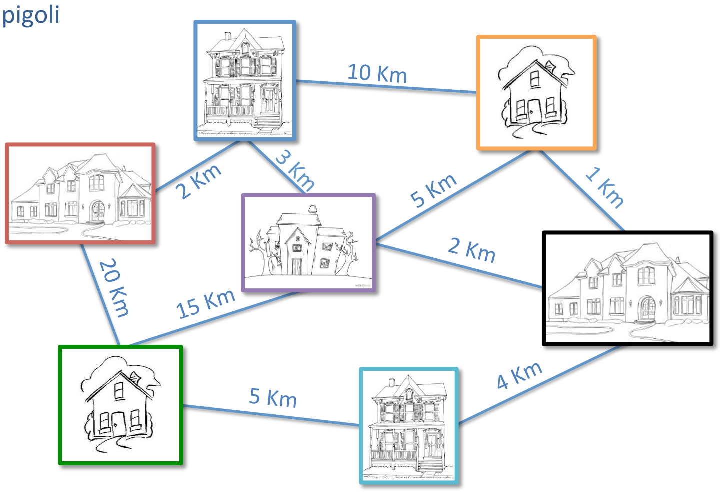
La via più breve

- Su un grafo la distanza tra due vertici *u* e *v* è data dalla lunghezza del cammino che collega *u* a *v*
  - La lunghezza del cammino è data dal numero di spigoli che lo compongono



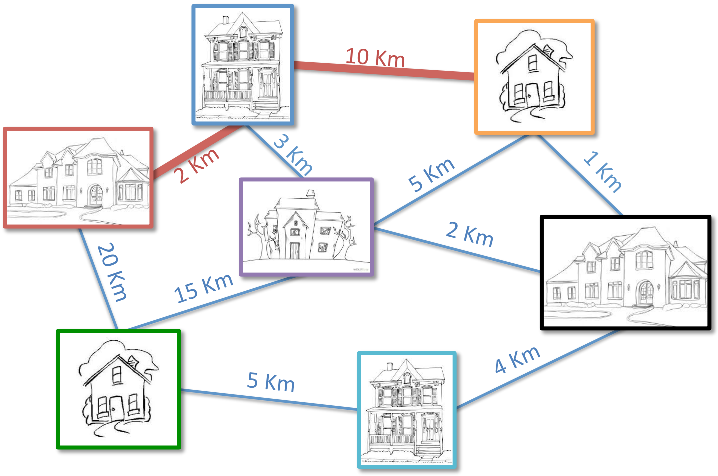
La via più breve

- Cosa succede se aggiungo una misura della lunghezza delle strade rappresentate dagli spigoli del grafo?
  - La lunghezza (il costo) del cammino è data dalla somma delle lunghezze degli spigoli



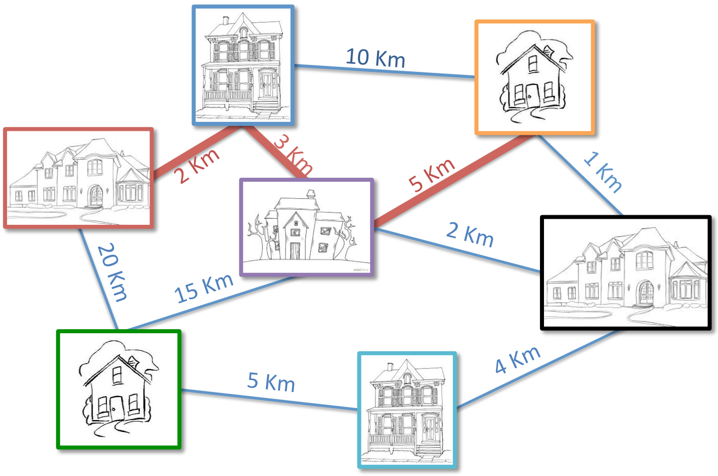
La via più breve

- Problema di ottimizzazione: cerchiamo **la via più breve**... è la stessa di prima?
  - Il cammino da casa rossa a casa gialla, passando per casa blu, "costa" **12 Km**



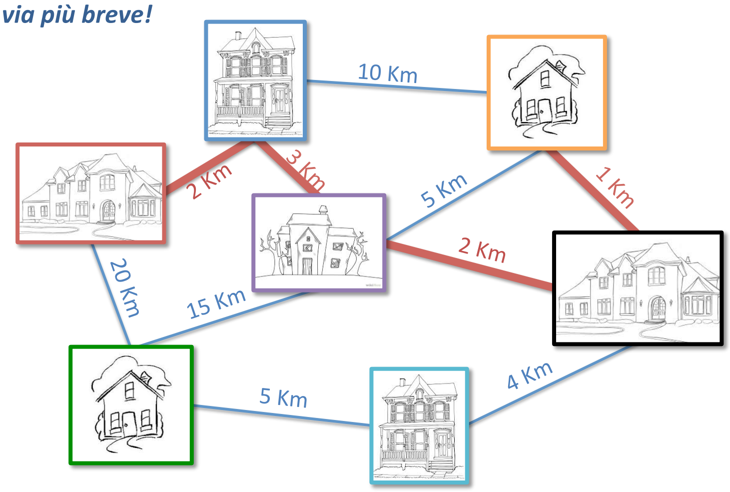
La via più breve

- Problema di ottimizzazione: cerchiamo **la via più breve**... è la stessa di prima?
  - Una via più tortuosa, passando anche per casa viola, “costa” meno: **10 Km**



La via più breve

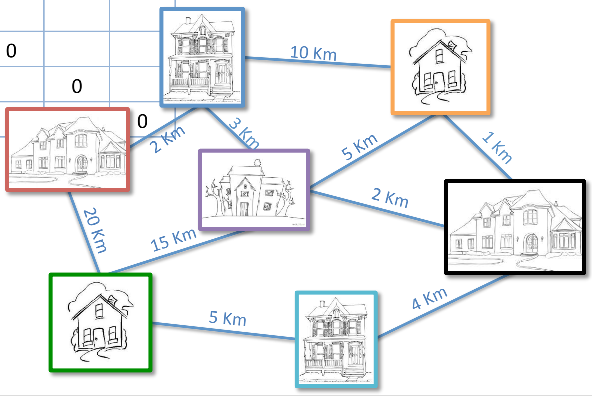
- Problema di ottimizzazione: cerchiamo **la via più breve**... è la stessa di prima?
  - Una via ancora più tortuosa “costa” meno di ogni altra: **8 Km**. ***Questa è la via più breve!***



Playtime

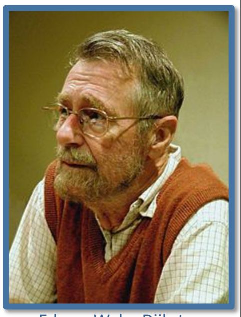
- Compilate una tabella con le distanze chilometriche da ogni coppia di case

	0	2	8	…			
	2	0	6	…			
	8	6	0	…			
	…	…	…	0			
					0		
						0	
							0



La via più breve

- È evidente che la ricerca esaustiva della soluzione non è un approccio praticabile: le possibili strade da provare (combinazioni di spigoli del grafo) sono troppe
- È necessario progettare un algoritmo che consideri meno casi, ma con una strategia tale da non perdere le soluzioni "buone"
- Nel 1959 **Edsger Wybe Dijkstra** ha elaborato un algoritmo estremamente elegante, oggi noto come **algoritmo di Dijkstra**, per il calcolo dei cammini di costo minimo
  - Dijkstra ha dimostrato che il proprio algoritmo, oltre ad essere corretto (fornisce sempre una soluzione ottima), effettua un numero di operazioni molto basso: su un grafo di n vertici esegue al massimo n^2 operazioni!



Edsger Wybe Dijkstra
(1930–2002)

Quale riferimento utile

- A. Cerasoli, *Matemago*, Feltrinelli KIDS, 2014
- P. Gritzmann, R. Brandenberg, *Alla ricerca della via più breve - Un'avventura matematica*, Springer, 2005
- M. Liverani, *Qual è il problema? Metodi, strategie risolutive, algoritmi,* Mimesis, 2005
- A. Millán Gasca, *Fabbriche, Sistemi, Organizzazioni*, Springer Verlag*, 2006*
- G. Spirito, *Matematica senza numeri*, Newton & Compton Editori, 2004

Grafi, alberi e reti: modelli su cui cercare soluzioni "ottime"

... e non finisce qui, ma anche questa volta ...

Grazie per l'attenzione!